ЗБИРКА ЗАДАТАКА I

математика за боље ученике
првих разреда гимназије

Растко Вуковић, проф.

Предговор

Књига је додатак мојој скрипти Математика I, наведеној у литератури на крају. Да бих избјегао понављање, ове и методе из скрипте се само дјелимично поклапају, али су одговарајуће области препознатљиве. Чак и ако су наслови једнаки, примјери и задаци нису. Тако је програм математике за средње школе у Републици Српској дубље захваћен.

Зато што се теме надовезују на поменута предавања, овде нема дугих нити лаких увода. Брзо се прелази са средње тешких „задачића“ за ученике слабијег и просечног знања на задатке за боље ученике, све до понеког проблема који би могао бити и на математичкој олимпијади. Ипак, као што ово није лектира за почетнике, није ни помагало за такмичења. Сматрам да „лаких“ збирки на нашем тржишту у овом тренутку има довољно, као и „тешких“ спортских. Уосталом, задаци са математичких надметања средњошколаца нису типични за процес наставе.

Још један важан проблем код писања школских збирки долази из сукоба „прописа“ за наставника са могућим плагијаризмом. У уском процепу, између жалби да су задаци другачији од прописаних или „претешки“ и нарушавања нечијих ауторских права, тешко је бити оригиналан, али то није немогуће. Свугдје сам, гдје је то имало смисла, пажљиво цитирао изворе али сам их и радо избјегавао. Иначе, супротно општем веровању, мислим да много учења напамет, или увјежбавања „истих“ задатака не би требао бити циљ математике за гимназије.

Сматрам да су (кратки) излети изван редовног градива пожељни и корисни. То не само зато што су теме нашег програма понегдје послагане као рогови у врећи, већ и због сталног постепеног развоја математике и њених примена у свијету.

Тако некако долазимо до закључка да је ово збирка задатака за додатну наставу, или за додатно самостално учење математике. Циљана је да буде један обичан приручник каквих немамо довољно у повезивању предвиђеног школског градива, али на начин да више служи учењу горње половине, од оних мање лоших до најбољих ученика.

Растко Вуковић, јануар 2016.

Sadržaj

Glava 1

Логика и скупови

Овдје су обрађени појмови засновани на математичкој логици и теорији скупова, који заједно са теоријом група припадају области апстрактне алгебре.

1.1 Алгебра исказа

Исказ је реченица алгебре логике, односно тврђење које може бити тачно или нетачно. Означавамо „тачно“ са 1 или $\top$, што читамо „те“, а „нетачно“ са 0 или $\bot$ што читамо „не-те“. Истинитосну вриједност реченице p често означавамо са $\tau(p)$. Према томе, $\tau(p) = \top$ када је p тачан исказ, а $\tau(p) = \bot$ када је p нетачан исказ.

Варијабле, промењљиве, или опште бројеве алгебре логике означавамо великим или малим словима $a, b, c, \dots, x, y, z$. Оне такође могу узети само по једну од две вриједности из скупа {„те“, „не-те“}. Негација је унарна операција и она има највиши приоритет. Мало нижи приоритет имају бинарне операције конјункција, дисјункција, а још нижи приоритет имају импликација и еквиваленција, такође бинарне операције.

Негација исказа a, коју означавамо $\neg a$, $\bar{a}$, или a', мења вриједност тачности исказа a, тако да је $\neg\top = \bar{\top} = \bot$ и $\neg\bot = \bar{\bot} = \top$, односно $\neg 1 = \bar{1} = 0$ и $\neg 0 = \bar{0} = 1$, када исказ a узима редом вриједности „тачно“, односно „нетачно“.

Дисјункција два исказа, $a \vee b$ што читамо „a или b“, је тачна ако и само ако је бар један од тих исказа тачан. *Конјункција* два исказа, $a \wedge b$, или $a \& b$ што читамо „a и b“, је тачна ако и само ако су оба исказа тачни. Дисјункција и конјункција су редом дати у следећим скраћеним табелама.

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

Када нема забуне са аритметиком, дисјункцију и конјункцију пишемо као сабирање и множење, редом $a + b$ и $a \times b$, односно $a \cdot b$.

Задатак 1.1.1. *Провјерити тачност исказа:*

$$\frac{4}{5} > \frac{5}{7}; \quad \frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1}{10}; \quad \neg\left(\frac{31}{32} < \frac{15}{16}\right); \quad \neg\left(\frac{17}{18} - \frac{13}{14} = \frac{1}{63}\right).$$

Импликација, коју означавамо $a \Rightarrow b$, је увек тачна осим када је претпоставка a тачна, а последица b нетачна. Еквиваленција, $a \iff b$, је тачна када су искази a, b исте вриједности. Ексклузивна дисјункција $a \veebar b$ (такође $a \nabla b$ или $a \oplus b$) је тачна када је само један од исказа a, b тачан.

Примјер 1.1.2. *Написати скраћену табелу еклузивне дисјункције.*

Рјешење 1.1.2. За оба иста ∇ даје нетачно $\bot$, а за различита тачно $\top$:

∇	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

□

Примјер 1.1.3. *Изразити ексклузивну дисјункцију помоћу негације, конјункције и дисјункције.*

Рјешење. Има више начина, нпр. $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$, или $a \oplus b = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$, или $a \oplus b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$. Користећи „инжињерске“ ознаке[1], последњи примјер био би: $a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$. □

Задатак 1.1.4. *Написати скраћену табелу импликације (еквиваленције) и изразити их помоћу негације, дисјункције, или конјункције.*

Задатак 1.1.5. *Изразити дисјункцију и конјункцију помоћу импликације и негације.*

Уз импликацију, $a \Rightarrow b$, иду три додатне врсте исказа: конверзија $b \Rightarrow a$, инверзија $\neg a \Rightarrow \neg b$ и контрапозиција $\neg b \Rightarrow \neg a$.

Задатак 1.1.6. *Написати конверзију, инверзију и контрапозицију за импликацију:*
i. ако је он добар тенисер, онда је он популаран;
ii. ако пада киша, трава је мокра;
iii. данас је недеља, па је нерадни дан.

Таутологија је исказ који је увек тачан. По једној подели таутологије могу бити очигледне (нпр. „бјело је бјело“) или компликоване, по другој важније или мање важне.

Пирсов[2] закон $\{(x \to y) \to x\} \to x$ је једна од, компликованијих али важнијих, таутологија коју можемо сматрати врстом Закона искључења трећег[3]. Пирсова формула је лажна само ако је антецеденс $\{(x \to y) \to x\}$ тачан, а консеквент x

[1]за негацију $\bar{p}$ уместо $\neg p$, за конјункцију pq уместо $p \wedge q$, за дисјункцију $p + q$
[2]Charles Sanders Peirce (1839-1914), амерички математичар и филозоф
[3]Тврђење може бити само једно од: тачно, нетачно

нетачан. Ако је ово тачно, или је консеквенс, x, тачан, када је цела формула тачна, или је антецеденс $x \to y$ нетачан. У последњем случају, антецеденс од $x \to y$, што је x, мора бити тачан[4].

Примјер 1.1.7. *Пирсов закон:*

$$p(x,y) = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$$

i. доказати помоћу истинитосне таблице;
ii. доказати методом контрадикције.

Рјешење. i. Таблицу попуњавамо с лева у десно, редајући „тачно“ и „нетачно“ у прве две колоне, одозго на доле:

x	y	$x \Rightarrow y$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow x$	$p(x,y)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

У последњој колони сви ретци завршавају са тачно, тј. 1, што значи да је реченица p таутологија.

ii. Импликација $A \Rightarrow B$ је нетачна само када је A тачно и B нетачно. Претпоставимо да постоји такав случај. Тада $A = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) = \top$ и $B = x = \bot$. Зато је $A = ((\bot \Rightarrow y) \Rightarrow \bot)$, односно $A = ((\top) \Rightarrow \bot)$, па је $A = \bot$. То је у контрадикцији са претпоставком да је $A = \top$, што значи да је дата импликација увек тачна. □

Задатак 1.1.8. *Следеће таутологије:*

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q), \quad (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q),$$
$$\neg(p \wedge \neg p) \Rightarrow p, \quad (p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q),$$

i. доказати помоћу истинитосне таблице;
ii. доказати методом контрадикције.

Задатак 1.1.9. *Проверити таутологије*[5] *методом по свом избору:*
i. Закон рефлексивности импликације: $p \to p$;
ii. Закон искључења трећег[6]*:* $p \vee \neg p$;
iii. Закон непротивречности: $\neg(p \wedge \neg p)$;
iv. Закон двојне негације: $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
v. Закон транзитивности импликације: $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$;
vi. Закон транзитивности еквиваленције: $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r)$;
vii. Закон уклањања импликације: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$;

[4] Peirce, the Collected Papers 3.384
[5] Универзитет Црне Горе: http://www.fzpkotor.com/joomla/
[6] Tertium non datur

viii. Закон уклањања еквиваленције: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$;
ix. Закон свођења на апсурд[7]*:* $(\neg p \to (q \wedge \neg q)) \to p$;
x. Закон идемпотенције за конјункцију: $(p \wedge p) \leftrightarrow p$;
xi. Закон идемпотенције за дисјункцију: $(p \vee p) \leftrightarrow p$;
xii. Закон комутативности за конјункцију: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$;
xiii. Закон комутативности за дисјункцију: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$;
xiv. Закон асоцијативности за конјункцију: $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$;
xv. Закон асоцијативности за дисјункцију: $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$;
xvi. Закон апсорпције за конјункцију: $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$;
xvii. Закон апсорпције за дисјункцију: $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$;
xviii. Закон дистрибуције конјункције: $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$;
xix. Закон дистрибуције дисјункције: $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$;
xx. Деморганов закон конјункције: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
xxi. Деморганов закон дисјункције: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
xxii. Modus ponens[8]*:* $(p \wedge (p \to q)) \to q$;
xxiii. Modus tolens[9]*:* $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p)$;
xxiv. Закон конјункције са таутологијом: $(p \wedge \top) \leftrightarrow p$;
xxv. Закон дисјункције са таутологијом: $(p \vee \top) \leftrightarrow \top$;
xxvi. Закон кнјункције са контрадикцијом: $(p \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$;
xxvii. Закон дисјункције са контрадикцијом: $(p \vee \bot) \leftrightarrow p$.

Задатак 1.1.10. *Доказати да је формула* $F = \neg(x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y))$ *логички неистинита, тј. увек је нетачна.*

Задатак 1.1.11. *Доказати да формула* $f = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ *није нити идентички истинита, нити је идентички лажна.*

Задатак 1.1.12. *Ако су прве две реченице тачне, трећа реченица је: тачна, нетачна, неодређена.*

i. Ана је старија од Цвијана. Бранко је старији од Тање. Цвијан је старији од Бранка?

ii. Боровнице коштају више од јагода. Боровнице коштају мање од малина. Малина кошта више од јагода и боровница?

iii. Продавница и пијаца су јужно од апотеке. Њена кућа је североисточно од апотеке. Њена кућа је западно од продавнице и пијаце?

iv. Температура је у понедељак била нижа него у уторак. У среду је била нижа него у уторак. У понедељак је била виша него у сриједу?

Задатак 1.1.13. *Ако су прве две реченице тачне, трећа реченица је: тачна, нетачна, неодређена.*

a. Сви Ламели су Сигноти са дугмадима. Ниједан жути Сигнот нема дугмад. Ниједан Ламел није жут?

---

[7] Reductio ad absurdum - лат. „свођење на апсурд“
[8] Modus ponens - лат. „афирмација афирмацијом“
[9] Modus tolens - лат. „начин негације негирањем“

b. Чачкалица је корисна. Корисне ствари су вриједне. Чачкалица је вриједна?

c. Облачни дани су вјетровитији од сунчаних. Магловити дани су мање вјетровити од облачних. Сунчани дани су мање вјетровити од магловитих?

d. Књижара има бољи избор разгледница од киоска. Избор разгледница у драгстору је већи него у књижари. Драгстор има бољи избор разгледница него књижара или киоск?

У сљедећа два примјера сва три исказа су тачни. Који од понуђених одговора A, B, C, D или E је тачан?

Задатак 1.1.14. *Јована има четворо деце. Двоје њене деце имају плаве очи, а двоје смеђе. Пола од деце су девојчице. Ако су прва три исказа тачни, који од следећих је такође тачан?*

I: Најмање једна девојчица има плаве очи.

II: Двоје од деце су дечаци.

III: Дечаци имају смеђе очи.

A. само I, B. само II, C. само II и III, D. нити једна.

Задатак 1.1.15. *Све мешавине пића су сокови. Сви сокови су питки. Неки сокови су црвени. Ако су ова три исказа тачна, која од следећих реченица је такође тачна?*

I: Неке мешавине пића су црвене.

II: Сви сокови су мешавине пића.

III: Све мешавине пића су питке.

A. само I и II, B. само II, C. само I и III, D. само III, E. нити једна.

Следећа два задатка читајте пажљиво и бирајте понуђени одговор.

Задатак 1.1.16. *Четири особе фарбају Богданову кућу. Михајло фарба предњу страну. Лазар је у пролазу иза и фарба задњу страну. Андреј фарба оквире прозора на северној страни. Сергеј је на југу. Ако Михајло и Андреј замене мјеста, а затим се замене Андреј и Сергеј, гдје је тада Сергеј?*

A: у алеји иза куће,

B: на северној страни куће,

C: на предњој страни куће,

D: на јужној страни куће.

Задатак 1.1.17. *Филип воли да препусти студентима избор њихових сарадника. Међутим, ниједан пар студената не треба радити заједно седам или више узастопних часова. Адам и Бане јесу били заједно узастопних седам часова. Вељко и Гавро су радили заједно три узастопна часа. Вељко не жели да ради са Адамом. Ко би требао бити додјељен Банету?*

Вељко, Адам, Гавро, или Филип.

У следећа два задатка се тражи мудар, или логичан одговор.

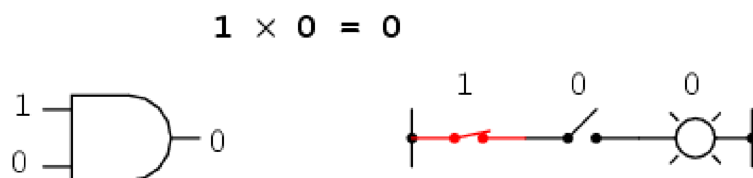
Задатак 1.1.18. *Богати отац је имао два сина а сваки од синова је имао по једног коња. Отац је на самрти окупио синове и рекао им. Оно што имам премало је да се дијели па ћу оставити оном од вас двојице који има споријег коња. Организоваћете трку на коњима и онај чији коњ стигне последњи наследиће моје имање, а онај који има бржег коња зарадиће са њим свакако.*

Не знајући како да заврше трку, која би могла трајати бесконачно, синови оду по савет мудраца. Шта им је мудрац могао одговорити?

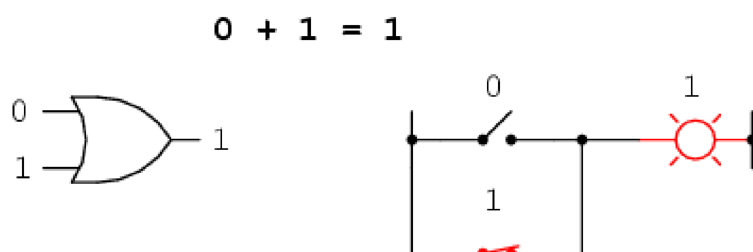
Задатак 1.1.19. *Претпоставимо да имамо два брата бизанца, једног који увијек говори истину, а другог који увијек лаже. Које једноставно питање, за одговор да-не, треба поставити непознатом од браће, да би сазнали који је он?*

У електротехници су ознаке за најчешће електричне контакте (прекидаче) приказане посебним симболима, као на следећим сликама. Прекидач x или y је укључен када има вриједност 1, односно искључен када има вриједност 0. Мултиполи су мреже контакта.

Конјункција „тачно и нетачно је нетачно" приказана је на слици 1.1, дисјункција „нетачно или тачно је тачно" приказана је на слици 1.2, а „негација нетачног је тачно" је на слици 1.3.



Slika 1.1: Конјункција: први је укључен, други искључен.



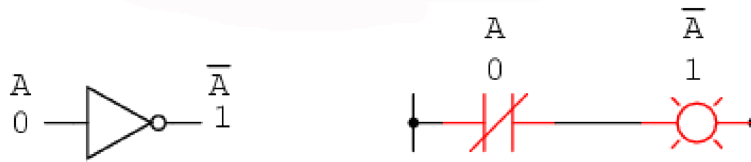
Slika 1.2: Дисјункција: први је искључен, други је укључен.

Задатак 1.1.20. *Представити закон дистрибуције* $A(B+C) = AB+AC$ *прекидачима.*

Задатак 1.1.21. *Представити прекидачима Деморганове законе:*

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

и доказати их анализирајући ток струје.



Slika 1.3: Негација: искључен постаје укључен.

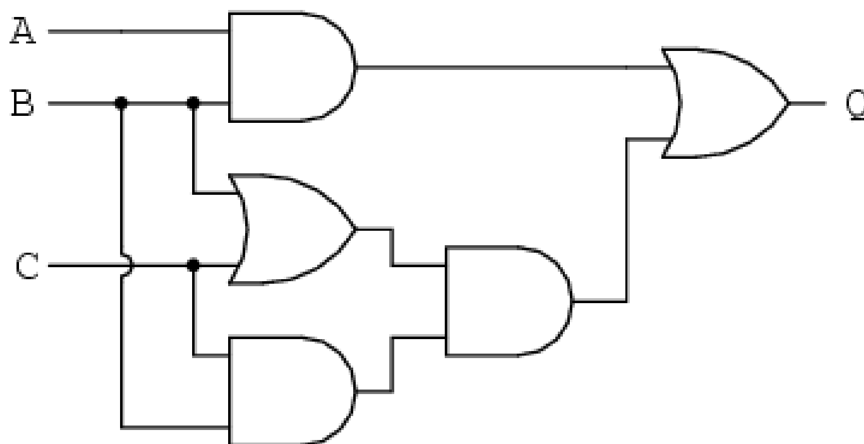
Негација се понекад означава апострофом. Тако је A' исто што $\bar{A}$ или $\neg A$. На шемама се негација означава и са ускличником испред.

Задатак 1.1.22. *Доказати формулу алгебре логике*

$$(A'B + AB')' = AB + A'B'.$$

Извести ову једнакост користећи Де Морганове законе, а затим нацртати и анализирати шему.

Задатак 1.1.23. *Коју формулу $Q = Q(A,B,C)$ представљају прекидачи на слици 1.4.*

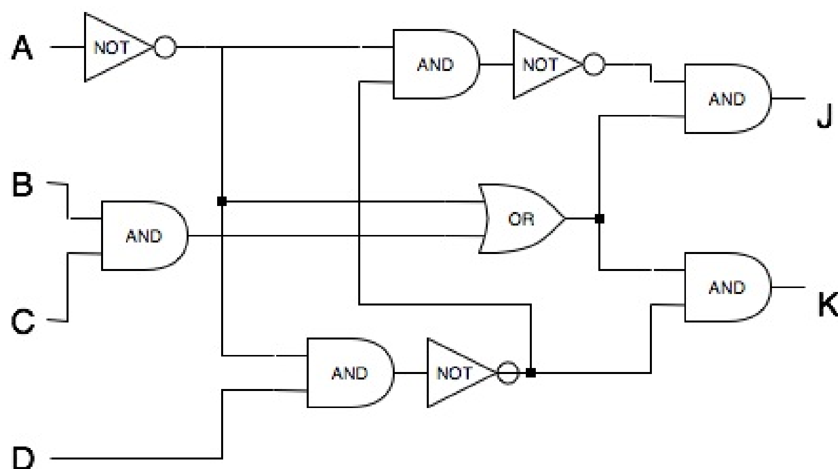


Slika 1.4: Наћи Q у функцији A, B и C.

Ради јасноће се дисјункција, конјункција и негација, на шеми прекидача додатно означавају енглеским OR, AND и NOT, као у следећем примјеру.

Задатак 1.1.24. *На шеми са слике 1.5 изразити J и K помоћу A, B, C и D.*

У алгебри логике постоје два основна *квантора*, или квантификатора: $\forall$ и $\exists$. Први је универзални и потсећа на (обрнуто) прво слово енглеске речи „All“ - сваки, а други је егзистенцијални и потсећа на прво слово енглеске речи „Egzist“ - постоји.



Slika 1.5: Наћи J и K у функцији A, B, C и D.

У реченици логике $\forall x$ читамо „за сваки икс“, а $\exists x$ читамо „постоји икс“. На примјер, реченицу $\forall x \in A\ f(x) \le M$ читамо „за свако х са особином А је еф од х мање или једнако М“.

Примјер 1.1.25. *Прочитати реченицу:*

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ m \le n.$$

Да ли је она тачна?

Рјешење. Читамо: "постоји природни број m такав да је за сваки природни број n, број m је мањи или једнак n". Јесте, такав је број $m = 1$. □

Задатак 1.1.26. *Дат је низ бројева $a_1, a_2, a_3, \dots$. Прочитати и протумачити реченице:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \ge m)\ |a_n - a_m| < \epsilon,$$

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall \epsilon > 0)(\forall n \ge m)\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Задатак 1.1.27. *Написати помоћу квантора. Када је дат произвољан природни број m увијек се може наћи природни број n, такав да је њихов производ већи од сваког унапријед датог природног броја p.*

Посебно, егзистенцијални квантор има још и облик $\exists_1$ или $\exists!$ који читамо „постоји тачно један“. Рецимо реченицу: $(\exists_1 x \in \mathbb{Q})\ 3 \cdot x = 1$, читамо: „постоји тачно један рационалан број икс такав да је три пута икс једнако један“.

1.2 Скуп

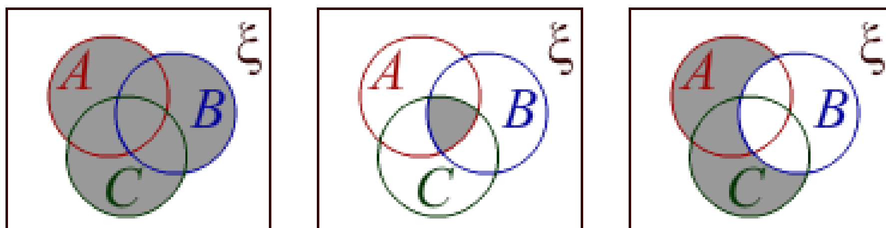
Скуп је толико основни појам у математици да га не треба дефинисати. Ако га ипак дефинишемо, можемо рећи да је скуп неуређена колекција различитих елемената.

Скупове и елементе означавамо великим и малим словима абецеде. Када елеменат x припада скупу A пишемо $x \in A$. Када сваки елеменат скупа A припада скупу B, тада кажемо „A је потскуп B“ и пишемо $A \subseteq B$. Два скупа су једнака акко (ако и само ако) је $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тада пишемо $A = B$. Када кажемо: „A је прави потскуп B“, тада је искључена могућност једнакости ова два скупа, и можемо писати $A \subset B$

Унија скупова A и B је скуп $A \cup B$ који садржи све елементе оба дата скупа и само њих. *Пресек* скупова A и B је скуп $A \cap B$ који садржи заједничке елементе датих скупова и само њих. *Комплемент* скупа A је скуп A' који садржи све оне елементе које не садржи дати скуп A. *Број елемената* скупа A означавамо са $n(A)$ или $|A|$. Унију и пресек, када то не доводи до забуне, често пишемо као збир и производ.

Разлика скупова A и B је скуп $A \setminus B$ који садржи све оне елементе првог који нису садржани у другом скупу. Скупове са којима радимо увек посматрамо као потскупове неког фиксног универзалног скупа, *универзума* који означавамо са U, E, или ξ. Празан скуп $\varnothing$ је скуп без елемената. За скупове кажемо да су *дисјунктни*, ако им је пресек празан скуп.

примјери Венових дијаграма за унију, пресек и разлику скупова A, B и C приказани су на слици 1.6 сенчењем.



Slika 1.6: $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup C) \setminus B$.

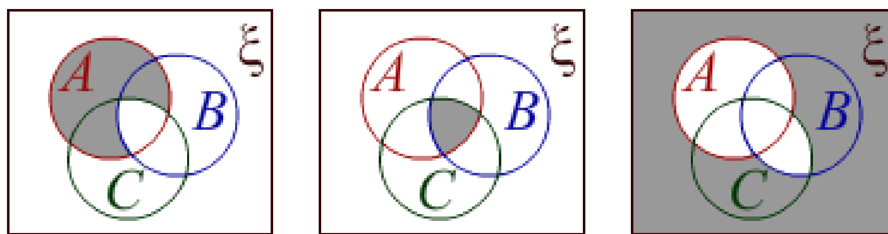
Различите ситуације разлике, пресека и комплемента са три скупа, приказане су Веновим дијаграмима на слици 1.7.

Задатак 1.2.1. *Показати да за комплемент скупа важи:*

$$A' = U \setminus A, \quad A' \cup A = U, \quad A' \cap A = \varnothing.$$

Задатак 1.2.2. *Показати да важе једнакости:*

1. $A \cup A = A$ *и* $A \cap A = A$ *- закони идепотенције;*
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *и* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *- закони асоцијације;*
3. $A \cup B = B \cup A$ *и* $A \cap B = B \cap A$ *- закони комутације;*



Slika 1.7: $A \setminus (B \cap C)$, $A \setminus (B \cap C)'$, $A' \setminus (B \cap C)$.

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *и* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *- закони дистрибуције;*

5. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ *- закони идентитета;*

6. $(A')' = A$ *- закон инволуције;*

7. $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \emptyset$, $U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$ *- закони комплемента;*

8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ *и* $(A \cap B)' = A' \cup B'$ *- Деморганови закони.*

Идентитети у задатку 1.2.2 су поредани у паровима *дуалних* скупова. Дуал скупа S је скуп S^* када се у једнакости они могу мењати заменом уније са пресеком или обратно. На примјер, дуали су U и $\emptyset$ у једнакостима:

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A, \quad (\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A,$$

које су обе тачне.

Задатак 1.2.3. *Дата су два произвољна два скупа A и B. Помоћу Венових дијаграма показати да су скупови $A \cap B'$, $A \cap B$ и $A' \cap B$ дисјунктни и да је њихова унија $A \cup B$.*

Задатак 1.2.4. *Доказати да за произвољна два скупа A и B важи једнакост:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Следећих неколико примјера се могу решавати помоћу Венових дијаграма, али и помоћу претходне формуле.

Задатак 1.2.5. *У разреду има 32 ученика. Њих 16 учи њемачки, а 21 учи енглески језик. Колико их учи оба језика?*

Задатак 1.2.6. *У кафани је током поднева 62 људи пило по једну кафу или неко пиће. Њих 45 је пило кафу, а 33 нешто друго. Колико гостију је пило кафу са другим пићем?*

Задатак 1.2.7. *Ако је* $n(A \setminus B) = 15$, $n(A \cup B) = 48$ *и* $n(A \cap B) = 12$, *колико је* $n(B)$*?*

Задатак 1.2.8. *У групи од 120 лица, 82 говоре енглески а 65 француски. Колико их говори само енглески, колико само француски, а колико оба језика?*

Задатак 1.2.9. *Показати да за произвољна три скупа A, B и C важе једнакости:*

$$(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C,\quad (A\cup C)\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

То су били закони дистрибуције уније и пресека. Скоро слична су и следећа правила са разликама.

Задатак 1.2.10. *Помоћу Венових дијаграма доказати скуповне једнакости:*

$$C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B),\quad C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B),$$

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C),\quad (A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C).$$

Задатак 1.2.11. *Показати да за произвољна три скупа A, B и C важи једнакост:*

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

Задатак 1.2.12. *На неком такмичењу подељене су медаље у три категорије A,B и C. У тим категоријама је подељено редом 40, 32 и 29 медаља. Укупно 56 особа су добиле медаље, а само 4 особе су добиле медаље у све три категорије. Колико укупно особа је добило медаље у по две категорије?*

Задатак 1.2.13. *У групи од 49 лица, свако игра бар једну од игара A, B или C. Њих 21, 27, односно 29 игра A, B, односно C, тим редоследом. Прву и другу игру игра 8 лица, другу и трећу 14, а све три играју 3 лица. Колико лица игра прву и трећу игру (A и C), а колико лица игра прву и другу али не и трећу игру?*

Задатак 1.2.14. *Група од 120 студената*[10] *означена је бројевима од 1 до 120. Сви са парним бројевима су кандидати за физику, они са бројевима дјељивим са 5 су кандидати за хемију, а они са бројевима дјељивим са 7 суза математику. Колико их нису кандидати нити за један наведени предмет?*

Задатак 1.2.15. *Од 200 кандидата на интервју за посао, 100 има мотоцикл, 70 има кредитну картицу, а 140 има мобилни телефон. Оба, мотоцикл и кредитну картицу има њих 40, кредитну картицу и мобилни има њих 60, а мотоцикл и мобилни имају 60. Десет кандидата има сва три уређаја. Колико кандидата нема нити један уређај?*

Задатак 1.2.16. *Ако је $A\subset C$ и $A\subseteq B\subseteq C$, тада је $A\subset B$ или је $B\subset C$. Доказати.*

Декартов производ скупова је скуп уређених парова њихових елемената. Прецизније, за дате скупове A и B, Декартов производ је скуп

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}. \tag{1.1}$$

[10] Ascen education: `http://www.ascenteducation.com/`

Задатак 1.2.17. *Ако је* $A \subseteq B$ *и* $C \subseteq D$*, тада је* $A \times C \subseteq B \times D$*. Доказати.*

Задатак 1.2.18. *Доказати да за произвољне скупове важи дистрибуција:*

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Задатак 1.2.19. *Доказати дистрибуцију:*

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Задатак 1.2.20. *Доказати дистрибуцију:*

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Задатак 1.2.21. *Пописивач иде од врата до врата и улази у кућу Олге, која је наставница математике. Добар дан госпођо, скупљам податке за попис. Колико вас живи на овој адреси? Муж и ја са троје деце, одговара она. Добро, колико деца имају година? Е па, то ћете морати да израчунате, каже Олга. Производ њихових година је 72.*

П: У реду, рачунам, али треба ми још информација.

О: Збир њихових година је исти као број на адреси моје куће.

П: Добро, али требам још неки податак.

О: Тако је. Моје најстарије дете заиста воли спанаћ.

Аха, одговорио је пописивач, сада знам.

Који је број Олгине куће и колико њена деца имају година?

Задатак 1.2.22. *Свака од четири карте на слици 1.8 има слово на једној страни и број на другој. Колико најмање карата треба окренути ради провере следећег правила: "ако је на једној страни слово A онда је на другој страни број 7"?*

Slika 1.8: Васонов (Wason, 1924 – 2003) тест.

Задатак 1.2.23. *Доказати Деморганове законе за скупове:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Симетрична разлика скупова A и B је скуп:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B), \tag{1.2}$$

који се означава такође са $A \ominus B$ или $a \oplus B$.

Задатак 1.2.24. *Показати да важи једнакост:*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

на два начина:
i. на примјеру скупова $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *и* $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
ii. помоћу Венових дијаграма,

Принцип *математичке индукције.* Нека је дат низ исказа $T_1, T_2, T_3, \dots$, дакле тврђења од којих је свако тачно или нетачно. Нека важе ове две особине:
1. T_1 је тачно,
2. увек када је T_n тачно, биће T_{n+1} такође тачно.
Тада је свако T_n тачно.

Задатак 1.2.25. *Доказати да је* n^2 *збир првих* $n = 1, 2, 3, \dots$ *непарних бројева.*

Задатак 1.2.26. *Доказати:*

$$\begin{array}{llll} i. & 2 + 4 + 6 + \dots = n(n+1), & ii. & 1 + 4 + 7 + \dots = n(3n-1)/2, \\ iii. & (\forall n \ge 3)\ n^2 \ge 2n + 1, & & (\forall n \ge 4)\ n! \ge 2^n, \end{array}$$

гдје факторијел дефинишемо са $n! = (n-1)! \cdot n$, *односно* $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, ...

Партитативни скуп скупа A је скуп $\wp(A)$ свих подскупова скупа A. На примјер, скуп

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \tag{1.3}$$

је партитативни скуп скупа $A = \{1, 2, 3\}$.

Задатак 1.2.27. *Доказати да је* $n(\wp(A)) = 2^{n(A)}$.

Задатак 1.2.28. *У некој групи лица свако се бави неком од активности: плес, трчање, јога и шах. Онај који се бави плесом или шахом бави се и трчањем. Онај ко се бави јогом бави се и шахом. Онај ко се бави трчањем и јогом бави се и плесом. У којој од наведених активности има најмање, а у којој највише ових лица.*

Следећу загонетку је у прошлом веку наводно осмислио Ајнштајн[11] и рекао да их може решити само 2% људи.

Задатак 1.2.29. *Човек је наишао на медведа у пустари. Оба су се уплашила и почела бежати. Човек на север, медвед на запад. Изненада, човек је стао нациљао пушком на југ и убио медведа. Које боје је био тај медвед?*

[11] Albert Einstein, 1879 - 1955, славни теоријски физичар.

Задатак 1.2.30. *Имамо низ пет кућа различитих боја. У свакој кући живи човек другачије националности. Сваки човек има другачијег љубимца, воли различито пиће и пуши различиту марку цигарета.*

1. *Британац живи у црвеној кући.*
2. *Швеђанин држи пса као љубимца.*
3. *Данац пије чај.*
4. *Зелена кућа је лево од беле куће.*
5. *Власник беле куће пије кафу.*
6. *Особа која пуши Пал Мал гаји птице.*
7. *Власник жуте куће пуши Данхил.*
8. *Човек који живи у централној кући пије млеко.*
9. *Норвежанин живи у првој кући.*
10. *Човек који пуши Бленд живи поред оног ко држи мачке.*
11. *Човек који држи коње живи поред човека који пуши Данхил.*
12. *Човек који пуши Блу Мастер пије пиво.*
13. *Немац пуши Принц.*
14. *Норвежанин живи поред плаве куће.*
15. *Човек који пуши Бленд има комшију који пије воду.*

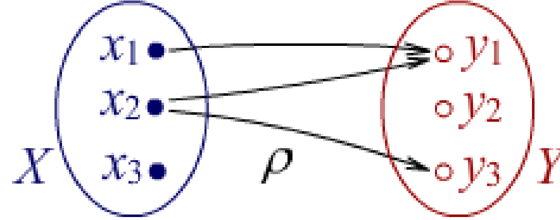
Ко има рибе код куће? Јесте ли међу оних 2% ?

1.3 Релација

Бинарна релација је скуп уређених парова:

$$\rho = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots\}, \tag{1.4}$$

гдје су први елементи парова из скупа који називамо *домен* релације ($x_1, x_2, \dots \in X$), а други елементи парова из скупа који називамо *кодомен* релације ($y_1, y_2, \dots \in Y$), као што се види на слици 1.9.



Slika 1.9: Релација $\rho : X \to Y$.

За уређене парове скупа ρ кажемо да су у релацији. На примјер, бинарна релација је скуп $\rho = \{(1,2), (-3,4), (a,-5)\}$, што значи да су 1 и 2 у релацији, затим -3 и 4, а такође и пар a и -5. То краће пишемо $1\rho 2$, $(-3)\rho 4$ и $a\rho(-5)$. Разлог за овакво писање су најпознатије релације као што су једнакост[12], или неједнакост[13]. Релација може имати коначно или бесконачно много елемената (уређених парова).

У даљем тексту подразумевамо да је релација бинарна. Међутим, релација је уопште скуп уређених низова константне дужине. На примјер, релација дужине три је скуп трочланих низова, прецизније:

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}, \quad \mu_k = (x_k, y_k, z_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.5}$$

Другим речима, трочлана релација је Декартов производ три скупа X, Y и Z, који је скуп уређених тројки:

$$\mu = \{(x, y, z) | x \in X, y \in Y, z \in Z\}. \tag{1.6}$$

Дефиниције (1.5) и (1.6) су еквивалентне и могу се даље поопштавати.

Нека су X_1 и X_2 непразни скупови и нека је ρ бинарна релација Декартовог производа $X_1 \times X_2$. Тада пишемо $\rho \subseteq X_1 \times X_2$, а скупове:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1(\rho) = \{x_2 \in X_2 | \exists x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in \rho\}, \\ \mathcal{D}_2(\rho) = \{x_1 \in X_1 | \exists x_2 \in X_2, (x_1, x_2) \in \rho\}, \end{cases} \tag{1.7}$$

називамо првом и другом *пројекцијом*, редом. Прву пројекцију називамо и домен или област дефинисаности, а другу кодомен, ранг или подручје вриједности дате релације. Скуп

$$\rho^{-1} = \{(x_2, x_1) | (x_1, x_2) \in \rho\}$$

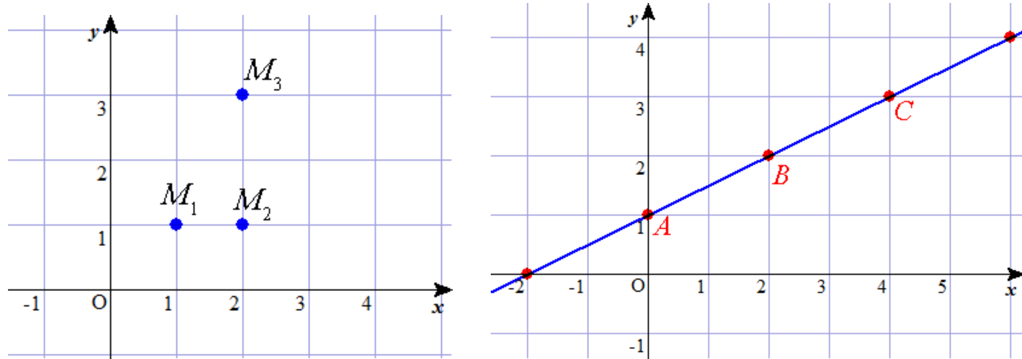
[12] пишемо $x = y$ уместо $= (x, y)$

[13] пишемо $x \le y$ уместо $\le (x, y)$

називамо *инверзном релацијом* дате релације.

Примјер 1.3.1. *У Декартовој равни Oxy представити релацију*

$$M = \{(1,1),(2,1),(2,3)\}.$$



Slika 1.10: Релације: i) $M : x \to y$; ii) $f : x \to \frac{1}{2}x + 1$.

Рјешење. То су тачке са координатама $M_1(1,1), M_2(2,1)$ и $M_3(2,3)$, приказане на слици 1.10 лево. Приметимо да ова релација представља ону на слици 1.9. □

Примјер 1.3.2. *У Декартовој равни Oxy представити релацију*

$$f = \{(x,y)|y = \frac{1}{2}x + 1,\ \ x \in \mathbb{R}\}.$$

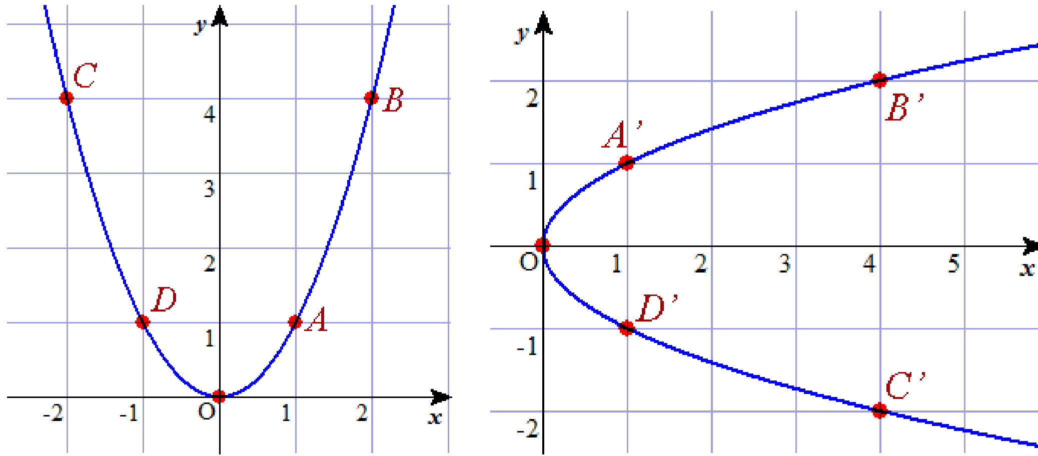
Рјешење. Израчунавамо неколико тачака, на примјер $A(0,1), B(2,2), C(4,3)$, док не приметимо да све оне леже на истој правој, представљеној на слици 1.10 десно. То је права линија у Декартовом правоуглом систему кооордината Oxy, чије тачке имају апсцисе x и ординате $y = \frac{1}{2}x + 1$. Парови ових координата (x,y) су елементи дате релације f. □

Примјер 1.3.3. *У Декартовој равни Oxy представити релацију*

$$\rho = \{(x,y) : y = x^2\}.$$

Рјешење. Користећи дату једнакост $y = x^2$ израчунавамо што је могуће више уређених парова (x,y) које цртамо као тачке у Декартовом систему Oxy. На слици 1.11 лево, такве су тачаке: $O(0,0), A(1,1), B(2,4), C(-2,4)$ и $D(-1,1)$. Све сличне тачке леже на параболи и зато за једнакост $y = x^2$ кажемо да дефинише параболу. □

Решавањем једначине $y = x^2$ по x добијамо $x = \pm\sqrt{y}$, што нам даје идеју да поставимо следећи, инверзни проблем.



Slika 1.11: Граф параболе $\rho: y = x^2$ и корена $\rho^{-1}: y = \pm\sqrt{x}$.

Примјер 1.3.4. *У Декартовој равни Oxy представити релацију*

$$\rho^{-1} = \{(x, y) : y = \pm\sqrt{x}\}.$$

Рјешење. Једнакошћу $y = \sqrt{x}$ израчунавамо парове (x, y) и цртамо тачке у Декартовом правоуглом систему Oxy. Добијамо граф корена, као на слици 1.11 десно. □

Приметимо да на графовима параболе и корена имамо инверзне тачке. Тачка $A'(1, 1)$ је инверзна тачки $A(1, 1)$, тачка $B'(4, 2)$ је инверзна $B(2, 4)$, $C'(4, -2)$ је инверзна $C(-2, 4)$, тачке $D'(1, -1)$ и $D(-1, 1)$ су инверзне. Добијају се заменом прве и друге координате. Уопште, тачка $T(\xi, \eta)$ која припада параболи ρ на слици 1.11 лево, инверзна је тачки $T'(\eta, \xi)$ која припада графу корена ρ^{-1} на слици 1.11 десно.

Зато кажемо да су инверзне и саме релације ρ и ρ^{-1} дефинисане једнакостима $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Приметимо да се једино тачке симетрале I и III квадранта Декартове равни инверзијом пресликавају саме у себе. Наиме, тачка $T(x, x)$ инверзијом прелази у тачку $T'(x, x)$ са истим координатама, а то су све тачке праве линије $y = x$.

На следећој слици 1.12, испрекидана права линија је оса симетрије параболе $y = ax^2$ и њој инверзног графа корена $y = \pm\sqrt{\frac{x}{a}}$, за произвољан реалан $a > 0$.

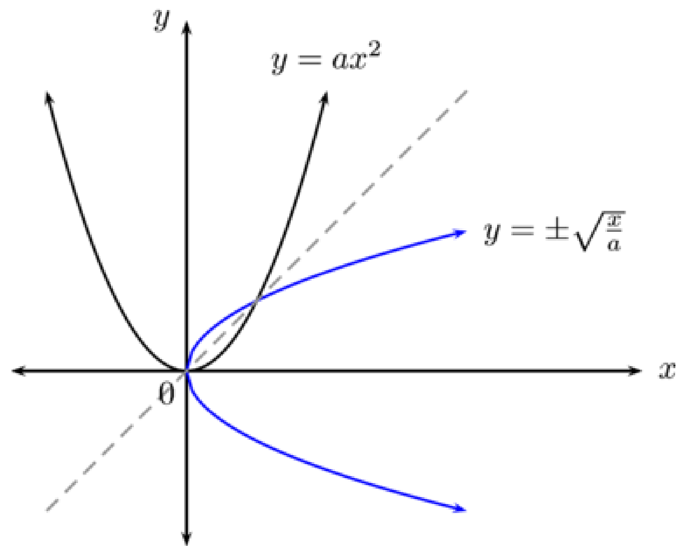
Било која функција $f : X \to Y$ може се посматрати као бинарна релација са скупа X на скуп Y. Таква релација се увек може представити графом

$$G(f) := \{(x, f(x)|x \in X\} \subseteq X \times Y. \tag{1.8}$$

Када год функција f има инверзну функцију f^{-1}, она је и инверзна релација. Та се функција тада може представити инверзним графом:

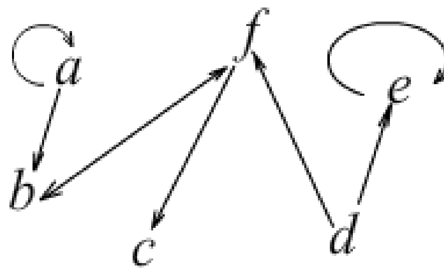
$$G^{-1}(f^{-1}) := \{(y, f^{-1}(y))|y \in Y\} \subseteq Y \times X. \tag{1.9}$$

Међутим, свака релација има инверзну релацију, била она функција или не.



Slika 1.12: Граф параболе $y = ax^2$ за $a > 0$, и корена $y = \pm\sqrt{x/a}$.

Задатак 1.3.5. *Дат је скуп* $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ *са графом релације* $\rho \subseteq X \times X$ *на слици 1.13. Представити релацију* ρ *и инверзну релацију* ρ^{-1} *помоћу скупа уређених парова.*



Slika 1.13: Граф релације ρ.

Задатак 1.3.6. *Дата је релација* $\rho = \{(x, y) : x|196 \land y|225, x \in \mathbb{N}\}$. *Написати све елементе скупа* ρ *и скупа* ρ^{-1}.

Задатак 1.3.7. *Дата је релација* $\rho = \{(x, y) : y = \frac{1}{3}x - 1, x \in \mathbb{R}\}$. *Представити* ρ *и* ρ^{-1} *у истом Декартовом Оху систему.*

Задатак 1.3.8. *Дата је релација* $\rho = \{(x, y) : y = 2x - 2, x \in \mathbb{R}\}$. *Представити* ρ *и* ρ^{-1} *у истом Декартовом Оху систему.*

Задатак 1.3.9. *Показати да је релацији дефинисаном функцијом* $y = x^2 - 1$ *инверзна релација дефинисана двема функцијама* $y = \pm\sqrt{x + 1}$, *на начи:*

$$\rho = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}\}, \quad \rho^{-1} = \{(x, y) \mid y = \pm\sqrt{x + 1},\ x \ge -1\}.$$

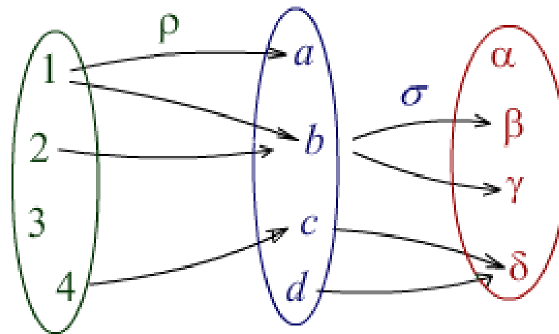
Нацртати графове у истом систему Oxy.

Када су дате бинарне релације $\rho_1 \subseteq X_1 \times X_2$ и $\rho_2 \subseteq X_2 \times X_3$ на непразним скуповима, онда се скуп

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(x_1, x_3) | (x_1, x_2) \in \rho_1 \wedge (x_2, x_3) \in \rho_2\}$$

назива *композиција* или производ релација ρ_1 и ρ_2.

Задатак 1.3.10. *На слици 1.14 су дате релацијер, σ и њихова композиција $\gamma = \sigma \circ \rho$. Написати елементе скупова ρ, σ, γ. Показати да је инверзна релација $\gamma^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.*



Slika 1.14: Композиција релација $\gamma = \sigma \circ \rho$.

Задатак 1.3.11. *Дате су релације:*

$$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}, \quad \rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3,)\}.$$

Наћи релацију ρ_2.

Задатак 1.3.12. *Дате су релације:*

$$\rho_2 = \{(1,2), (2,1), (3,2), (3,3)\}, \quad \rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3,)\}.$$

Наћи релацију ρ_1.

Задатак 1.3.13. *Дате су релације (функције):*

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}x - 3.$$

Наћи комопозицију $h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Показати да је $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Задатак 1.3.14. *Навести примјере релација ρ_1, ρ_2 и проверити:*

a. $x(\rho_1 \cup \rho_2)y \iff x\rho_1 y \vee x\rho_2 y$,
b. $x(\rho_1 \cap \rho_2)y \iff x\rho_1 y \wedge x\rho_2 y$,
c. $x(\rho_1 \backslash \rho_2)y \iff x\rho_1 y \wedge \neg(x\rho_2 y)$,
d. $\rho_1 \subseteq \rho_2 \Rightarrow (x\rho_1 y \Rightarrow x\rho_2 y)$.

Када је дата релација $\rho \subseteq X \times Y$, са $\rho(X) \subseteq Y$ означавамо све оне елементе $y \in Y$ за које постоји неки елеменат $x \in X$, тако да је $x\rho y$, тј. $(x, y) \in \rho$.

Задатак 1.3.15. *Нека је $\rho \subseteq X \times Y$ бинарна релација из X у Y. Нека су $A, B \subseteq X$ произвољни подскупови домена. Доказати:*
a. $A \subseteq B \Rightarrow \rho(A) \subseteq \rho(B)$,
b. $\rho(A \cup B) = \rho(A) \cup \rho(B)$,
c. $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$.

Задатак 1.3.16. *Нека су $\rho_1, \rho_2 \subseteq X \times Y$ две релације из домена X у кодомен Y. Ако је $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ за свако $x \in X$, тада је $\rho_1 = \rho_2$.*

За релацију $\rho \subseteq X \times X$ кажемо да је рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна, ако важи, истим редом:

$$x\rho x, \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x, \quad (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow (x = y), \quad (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow (x\rho z),$$

за све њене елементе (уређених парова) $x, y, z \in \rho$. Ирефлексивна (неповратна) је релација за коју никада није $x\rho x$.

Када је релација рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, она се кратко назива релацијом поретка. На примјер, неједнакост $x \le y$ за $x, y \in \mathbb{R}$, или $a \subseteq b$ за скупове a и b, или $a \Rightarrow b$ за $a, b \in \{\top, \bot\}$. Када је релација рефлексивна, симетрична и транзитивна, кажемо да је она релација еквиваленције и означавамо је са $\sim$. Пишемо $x \sim y$ и кажемо: елементи x и y су еквивалентни.

Задатак 1.3.17. *Дат је скуп $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и једнакост $y = 2x - 3$. Наћи релацију $\rho = \{(x, y) | x, y \in S\}$. Представити је као скуп уређених парова и као граф.*

Примјер 1.3.18. *Ако је ρ релација поретка на датом скупу, тада је њој инверзна релација ρ^{-1} такође релација поретка на истом скупу.*

Рјешење. Рефлексивност је тривијална. Антисиметрија $(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$ значи да $(y, x) \in \rho^{-1} \wedge (x, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow y = x$, за свако x и y, што значи антисиметрију инверзне релације. Транзитивност следи из, редом:

$$(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho,$$

$$(y, x) \in \rho^{-1} \wedge (z, y) \in \rho^{-1} \Rightarrow (z, x) \in \rho^{-1},$$
$$(z, y) \in \rho^{-1} \wedge (y, x) \in \rho^{-1} \Rightarrow (z, x) \in \rho^{-1}.$$

Прва формула је транзитивност дате релације ρ, а трећа је тражена транзитивност њој инверзне релације ρ^{-1}. □

Цео број a дељив је целим бројем b различитим од нуле ($a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \ne 0$), ако постоји цео број q такав да је $a = bq$. Тада пишемо $b|a$ и читамо „b дијели a“. Број b називамо *дијелилац* или *садржалац* броја a, број q количник или квоцјент тог делења. Релација $b|a$ је релација поретка.

Задатак 1.3.19. *Доказати да важе особине дељивости:*

1. *ако $b|a$, онда $b|ac$ за свако $c \in \mathbb{Z}$;*
2. *ако $a|b$ и $b|c$ онда $a|c$;*
3. *ако $a|b$ и $a|c$, онда $a|(bx + cy)$ за свако $x, y \in \mathbb{Z}$;*
4. *ако $a|b$ и $b|a$, онда је $a = b$ или је $a = -b$;*
5. *ако за позитивне бројеве a, b важи $a|b$, онда је $a \le b$.*

Следећи примјер је доказ тзв. *Еуклидовог алгоритма дељења.*

Примјер 1.3.20. *Доказати да се сваки цео број $a \in \mathbb{Z}$ може на јединствен начин помоћу датог природног броја $b \in \mathbb{N}$ приказати у облику*

$$a = bq + r, \quad q, r \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le r < b.$$

При томе се q и r називају редом: количником и остатком при дељењу броја a бројем b.

Доказ. Из скупа $S = \{\dots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots\}$ целих бројева изаберимо најмањи који је природан или нула[14]. Нека је то број $r = a - bq \in \mathbb{N}_0$. Тада је

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b,$$

јер би у случају $r \ge b$ и број $a - (q + 1)b$, који је мањи од r, био природан или нула. Тиме је доказана егзистенција бројева q и r.

Јединственост тих бројева доказујемо сводећи на контрадикцију претпоставку да постоји још један такав пар q_1, r_1. Наиме, одузимањем старе од нове једнакости $a = bq_1 + r_1$ која такође иде са условом $0 \le r_1 < b$, добијамо $0 = b(q_1 - q) + (r_1 - r)$, што значи дељивост $b|(r_1 - r)$. Даље, због $|r_1 - r| < b$ имамо $r_1 - r = 0$, те $q_1 = q$. □

Задатак 1.3.21. *Доказати да је сваки производ четири узастопна цела броја дељив са 24.*

Задатак 1.3.22. *Доказати:* $(\forall n \in \mathbb{N})\ 30|(n^5 - n)$.

Задатак 1.3.23. *Доказати да ни за један цео број n број $n^2 + 3n + 5$ није дељив са 121.*

Кажемо да је $d \in \mathbb{Z}$ највећи заједнички дијелилац (нзд) целих бројева a и b ако важи $d|a$ и $d|b$, и ако за све $c \in \mathbb{Z}$ такве да $c|a$ и $c|b$ важи $|c| \le |d|$. Пишемо $d = \mathrm{NZD}(a, b)$.

Задатак 1.3.24. *У једној корпи налази се 35 kg зелених, а у другој 65 kg црвених јабука. Треба препаковати јабуке у мање једнаке гајбе без мешања зелених и црвених, а да у свакој гајби буде иста количина јабука. Одредити носивост гајбе.*

[14] Скуп природних бројева проширен нулом је $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Задатак 1.3.25. *Доказати да се највећи заједнички дијелилац бројева* $a, b \in \mathbb{Z}$ *може изразити у облику* $\text{NZD}(a, b) = \alpha a + \beta b$, *за погодно одабране* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Кажемо да је $d \in \mathbb{N}$ најмањи заједнички садржалац (нзс) целих бројева a и b ако важи $a|d$ и $b|d$, и ако за све $c \in \mathbb{N}$ такве да $a|c$ и $b|c$ важи $d \le c$. Пишемо $d = \text{NZS}(a, b)$.

Задатак 1.3.26. *Два аутомобила крећу истовремено на кружној стази. Први аутомобил пређе цео круг за 33, а други за 39 минута. После колико минута ће се оба аутомобила наћи поново истовремено на стартној линији?*

Тривијалне релације еквиваленције су: једнакост реалних бројева, једнакост скупова и еквиваленција логичких исказа. У наставку ћемо видети још неке.

Задатак 1.3.27. *Ако је* ρ *релација еквиваленције на датом скупу* S, *тада је њој инверзна релација* ρ^{-1} *такође релација еквиваленције на истом скупу* S.

Задатак 1.3.28. *Дата је релација* ρ *на скупу* S. *Ако је она:*
a. *рефлексивна* $(\forall x \in S)\ x\rho x$,
b. *ирефлексивна* $(\forall x \in S)\ \neg(x\rho x)$,
c. *симетрична* $(\forall x, y \in S)\ (x\rho y) \Rightarrow (y\rho x)$,
d. *анти-симетрична* $(\forall x, y \in S)\ (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow (x = y)$,
e. *транзитивна* $(\forall x, y, z \in S)\ (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow (x\rho z)$,
онда је таква и њој инверзна релација ρ^{-1}.

Задатак 1.3.29. *Бројеви* $x, y \in \mathbb{R}$ *су у релаицји ако и само ако је* $x^2 + y^2 \le 1$. *Да ли је та релација: a. рефлексивна, b. ирефлексивна, c. симетрична, d. анти-симетрична, e. транзитивна?*

Нека је у скупу X дефинисана релација еквиваленције $\sim$ и нека су a_1 и a_2 произвољни елементи тог скупа. Означимо са A_1 и A_2 скупове свих елемената еквивалентних редом са a_1 и a_2. Тада, или је $A_1 = A_2$ или $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. То значи да је скуп X подељен на дисјунктне скупове еквиваленције који се зову *класе еквиваленције*. Елементи из исте класе су међусобно еквивалентни, а елементи из различитих нису. Фамилију класа еквиваленције скупа X у односу на релацију еквиваленције $\sim$ називамо *скуп-количник* датог скупа и дате релације и означавамо га $X/\sim$. Узимањем у свакој класи еквиваленције једног елемента добија се скуп реперзентаната.

Примјер 1.3.30. *Релација паралелности* $a||b$ *правих* $a, b \in S$ *у еуклидском простору* S *је релација еквиваленције.*

Објашњење. Наиме, рефлексивност $a||a$ важи јер је свака права $a \in S$ паралелна самој себи. Симетрија $a||b \Rightarrow b||a$ важи, јер ако је права a паралелна b, онда је и друга права паралелна првој. Транзитивност $a||b \wedge b||c \Rightarrow a||c$ важи, јер ако је a паралелна b и b паралелна c, онда је a паралелна c. □

Примјер 1.3.31. *Бинарна релација $\rho \in S$ је рефлексивна, симетрична и задовољава следећи услов*
$$(\forall x, y, z \in S)\ x\rho y \wedge x\rho z \Rightarrow y\rho z.$$
Доказати да је ρ релација еквиваленције.

Доказ. Због симетрије ρ и комутативности конјункције је $z\rho x \wedge x\rho y \Rightarrow y\rho z$, а то је транзитивност. □

Нека је дат природан број m већи од 1 и нека су дата два цела броја a и b. Када пишемо[15]:
$$a \equiv b \pmod m$$
кажемо да је број a *конгруентан* броју b по модулу m, што значи да a и b имају једнаке остатаке након дељења са m.

Примјер 1.3.32. *Показати да је:* $166 \equiv 26 \pmod 7$ *и* $370 \equiv 28 \pmod 9$.

Рјешење. Тачно је, јер $166 = 26 \cdot 7 + 5$ и $26 = 3 \cdot 7 + 5$. Друго: $370 = 41 \cdot 9 + 1$ и $28 = 3 \cdot 9 + 1$. □

На примјер, када је $m = 3$, тада су сви природни бројеви подељени у три класе еквиваленције, оне дељиве са три који се могу писати у облику $3k$ (за $k = 1, 2, 3, \dots$), оне који имају остатак 1 (облика $3k+1$) и оне који имају остатак 2 (бројеви $3k+2$).

Задатак 1.3.33. *Доказати да је $a \equiv b \pmod m$:*
i. ако и само ако је $a = b + mz$ за неки цео број z;
ii. ако и само ако је разлика бројева a и b дељва са m;
iii. то је релација еквиваленције $a \sim b$ у односу на дати број m.

Задатак 1.3.34. *Ако је $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d; \pmod m$ онда је:*
i. $ax + cy \equiv bx + dy \pmod m$ за свака два цела броја x, y;
ii. $ac \equiv bd \pmod m$;
iii. ако је $m = \lambda n$, $n > 1$, онда је $a \equiv b \pmod n$.

Задатак 1.3.35. *Нека је $P(x)$ полином по x са целобројним коефицијентима. Тада из $a \equiv b \pmod m$ следи $P(a) \equiv P(b) \pmod m$.*

Примјер 1.3.36. *Наћи остатак делења броја 3^{100} са бројем 13.*

Рјешење. Из $3 \equiv 3 \pmod{13}$ следи $3^3 \equiv 27 \pmod{13}$. Из $27 \equiv 1 \pmod{13}$ следи $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$. Отуда $(3^3)^{33} \equiv 1^{33} \pmod{13}$, односно $3^{99} \equiv 1 \pmod{13}$. А како је $(3^3)^{33} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \pmod{13}$ биће $3^{100} \equiv 3 \pmod{13}$. Из $0 \le 3 < 13$ следи закључак да је остатак делења броја 3^{100} бројем 13 број 3. □

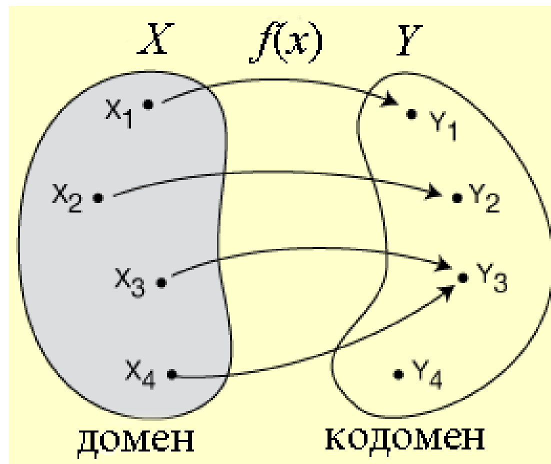
Задатак 1.3.37. *Одредити остатак при делењу броја 2^{2011} бројем* 13.

[15] Гаусова ознака из његове књиге „Disquisitiones arithmeticae“ објављене 1801. године.

1.4 Функција

Посебна врста релације је *функција.* Ако сваком елементу x из скупа X одговара поједини елеменат y скупа Y, кажемо да је скуп X пресликан у скуп Y. Први x је оригинал, други y је његова слика, а поступак пресликавања називамо функција f. Пишемо $f : X \to Y$, односно $y = f(x)$.

Сваки оригинал функције има највише једну слику, али не мора да буде обрнуто. Када свака слика потиче од највише једног оригинала, функција се назива *инјекција* или „1-1“. Када за сваку слику постоји оригинал, функција се назива *сурјекција* или „на“. Функција која је инјекција и сурјекција назива се *бијекција* или обострано једнозначно пресликавање.



Slika 1.15: Граф функције $f : X \to Y$.

На слици 1.15 је граф функције f која пресликава елеменат x_1 домена X у елеменат y_1 кодомена Y, затим x_2 у y_2, али оба x_3 и x_4 пресликава у исти y_3, што значи да представљена функција није инјекција. Са друге стране, она није нити сурјекција, јер за слику y_4 не постоји оригинал $x \in X$.

Задатак 1.4.1. *Шта би могли бити домен и кодомен следећих функција?*

i. $f(x) = 0$ *ако је* x *парно,* $f(x) = 1$ *ако је* x *непарно.*

ii. Јединична функција: $f(x) = x$ *за свако* $x \in X$.

iii. Пројекција: $f(x, y) = x$ *за свако* $(x, y) \in X \times Y$.

iv. Карактеристична функција на скупу X*: ако* $x \in X$ *тада* $f_k(x) = 1$*, а ако* $x \notin X$ *тада* $f_k(x) = 0$.

Задатак 1.4.2. *Нека је функција* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *дефинисана на следећи начин: вриједност* $f(x)$ *је збир цифара броја* x.

i. Израчунати: $f(4), f(23), f(362), f(f(234))$.

ii. Наћи сва решења једначине: $f(x) = 4$.

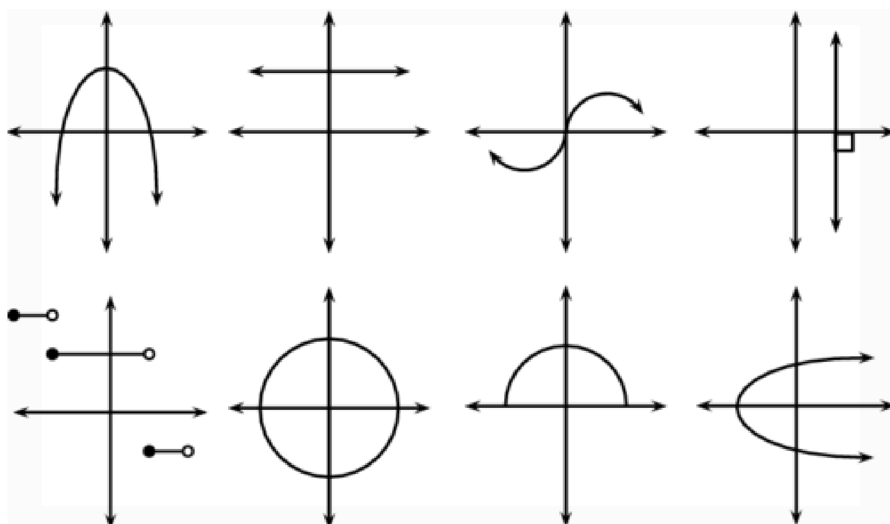
iii. Да ли је ова функција инјекција?

iv. Да ли је ова функција сурјекција?

Задатак 1.4.3. *За следеће функције проверити да ли су ињекције и сурјекције. Наћи њихове инверзне функције ако постоје.*

$$f_1(x) = 3x - 4, \quad f_2(x) = \frac{2x+1}{2x-1}, \quad f_3(x) = x^2 - 5, \quad f_4(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Задатак 1.4.4. *На слици 1.16 су приказани графови у Декартовом систему. Који од њих су функције, а који су само релације?*



Slika 1.16: Графови у Oxy.

Задатак 1.4.5. *Дате су функције формулама:* $f(x) = 2x + 1$ *и* $g(x) = x^2 - 2x + 3$. *Наћи композиције* $f \circ g, g \circ f, g \circ g$ *и* $f \circ f$.

Задатак 1.4.6. *Дате су функције формулама:*

$$f(x) = 3x - 2, \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = 6x - 7.$$

Наћи функцију $g(x)$.

Задатак 1.4.7. *Дате су функције формулама:*

$$g(x) = \frac{2}{3}x + 1, \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - 7.$$

Наћи функцију $f(x)$.

Задатак 1.4.8. *Дати су скупови* $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}, C = \{5,6,7\}$ *и функције:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Наћи композиције: $g \circ f : A \to C$ *и* $(f \circ g)^{-1} : C \to A$. *Показати да је* $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

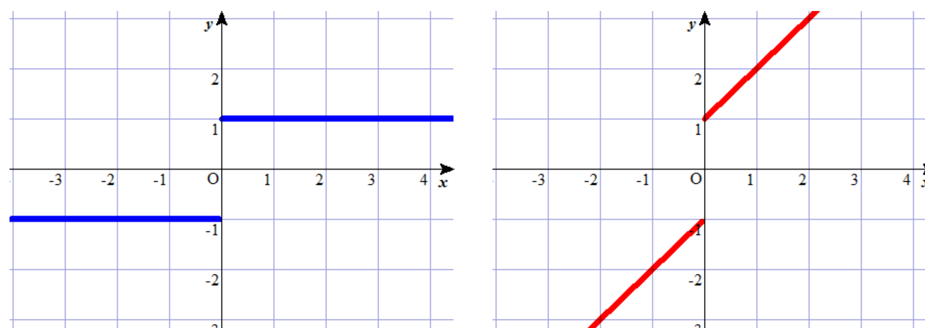
Задатак 1.4.9. *Нацртати граф функције* $f(x) = [x-1]$, *гдје угласта заграда значи највеће цело од аргумента.*

Примјер 1.4.10. *Нацртати графове функција:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x \ge 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}.$$

Наћи функције $h_1 = g \circ f$ *и* $h_2 = f \circ g$.

Рјешење. Горњу грану $f = 1$ (односно $g = x+1$) цртамо само за $x \ge 0$, а доњу $f = -1$ (односно $g = x-1$) само за $x < 0$, као на сликама 1.17.



Slika 1.17: Функције f и g.

$$h_1(x) = g[f(x)] = \begin{cases} f(x)+1, & f(x) \ge 0 \\ f(x)-1, & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x \ge 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases} = 2f(x),$$

$$h_2(x) = f[g(x)] = \begin{cases} 1, & g(x) \ge 0 \\ -1, & g(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = f(x).$$

□

Задатак 1.4.11. *Нацртати графове функција*

$$f(x) = |x-1| - 1, \quad g(x) = |x+1| - 1.$$

Наћи функције $h_1 = g \circ f$ *и* $h_2 = f \circ g$.

Задатак 1.4.12. *Нацртати граф функције*

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 0 \\ 3-x, & 1 \le x \le 3 \\ 3x, & x > 3 \end{cases}.$$

Примјер 1.4.13. *Решити неједначину* $x^2 - 1 > 0$.

Рјешење. За производ $(x-1)(x+1)>0$ тражимо $+\cdot+=+$ и $-\cdot-=+$. Налазимо, прво рјешење: $x-1>0$ $x+1>0$, односно $x>1$. Друго рјешење: $x-1<0$ и $x+1<0$, односно $x<-1$. Коначно рјешење је свако реално $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. □

Задатак 1.4.14. *Наћи домен функције:*

$$f_1(x)=\sqrt{x^2-4},\quad f_2(x)=\sqrt{4-x^2},\quad f_3(x)=\sqrt{x^2+4x},\quad f_4(x)=\sqrt{4x^2-12x}.$$

Задатак 1.4.15. *Решити неједначине:*

$$\frac{x-1}{x+2}>0,\quad \frac{x+1}{x-2}<3,\quad -1\le\frac{1-4x}{5}\le 1,$$

$$x^2-2x-3\le 0,\quad 0\le x^2+4x\le 5,\quad 0\le 4x^2-12x+8\le 3.$$

Комплемент скупа S у односу на (универзум) ξ означавамо са $C_\xi S$, односно просто CS када се универзум подразумева.

Следећи примјер је сличан задатку 1.3.15 из секције о релацијама, осим што је сада реч о функцији.

Задатак 1.4.16. *Нека f пресликава X у Y и нека су $A_1,A_2\subset X$. Тада важи:*
i. $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$,
ii. $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$,
iii. $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.

Нека $f:X\to Y$. Потсетимо се да је инверзна (реципрочна) слика елемента $y\in Y$ скуп свих елемената $x\in X$ за које важи $y=f(x)$. Реципрочну слику означавамо са $f^{-1}(x)$. Реципрочна слика неког елемента може бити и празан скуп, када $y\notin f(X)$. Ако је $B\subset Y$, реципрочна слика скупа B је скуп свих $x\in X$ таквих да је $f(x)\in B$, што означавамо $f^{-1}(B)$.

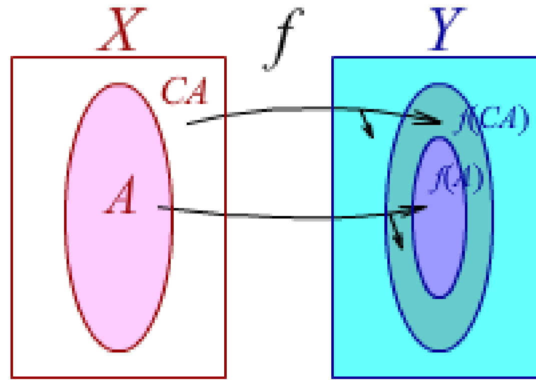
Задатак 1.4.17. *За инверзну (реципрочну) слику важи:*
i. $B_1\subset B_2\subset Y\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$,
ii. $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$,
iii. $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$,
iv. $f^{-1}(C_Y B)=C_X f^{-1}(B)$.

Потсетимо се да је бијекција (сурјекција и инјекција) свако пресликавање за које важи еквиваленција:

$$x_1\ne x_2 \iff f(x_1)\ne f(x_2).$$

У том случају, функција $f:X\to Y$ од једног оригинала $x\in X$ прави тачно једну слику тако да се свака слика $y\in Y$ инверзијом $f^{-1}:Y\to X$ може врати у тачно један оригинал.

Задатак 1.4.18. *Нека је $f:X\to Y$ и произвољни $A,A_1,A_2\subseteq X$.*
i. $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)\iff f$ *је бијекција.*
ii. $Cf(A)=f(CA)\iff f$ *је бијекција.*



Slika 1.18: Функција $f : X \to Y$.

Примјер 1.4.19. *Показати да за функцију* $f : X \to Y$ *важи* $Cf(A) \subseteq f(CA)$. *Та функција не мора бити бијекција.*

Рјешење. На слици 1.18 лево је домен X а десно је кодомен Y. Слика скупа $A \subset X$ је $f(A) \subset Y$, унија оба унутрашња кружна скупа. Слика комплемента $CA \subset X$ је $f(CA)$, спољашњост најмањег кружног скупа. Онај прстен у Y између два кружна скупа је заједнички за оба $f(A)$ и $f(CA)$. То значи да је $Cf(A) \subseteq f(CA)$.

Дакле, можемо имати два различита оригинала $x_1 \in A$ и $x_2 \in CA$ чије слике падају у заједнички део скупова $f(A)$ и $f(CA)$. Тада је $y = f(x_1) = f(x_2)$, али $y \in f(A) \cap f(CA)$, што значи да функција није бијекција.

Посебно, ако је $f(A) \cap f(CA) = \varnothing$, тада је $Cf(A) = f(CA)$ и функција јесте бијекција, што је требало показати у задатку 1.4.18. □

Дански математичар Јенсен[16] је 1906. године доказао да за све $x_1, x_2 \in X$ и све позитивне $p, q \in \mathbb{R}$ такве да је $p + q = 1$, важи неједнакост

$$f(px_1 + qx_2) \le pf(x_1) + qf(x_2), \tag{1.10}$$

ако је функција $y = f(x)$ *конвексна* (удубљена) на домену $X \subseteq \mathbb{R}$. Неједнакост ће бити обрнута:

$$f(px_1 + qx_2) \ge pf(x_1) + qf(x_2), \tag{1.11}$$

ако је функција *конкавна* (испупчена).

Примјер 1.4.20. *Квадратна функција* $y = x^2$ *је конвексна, а корена* $y = \sqrt{x}$ *конкавна, за* $x \ge 0$. *Проверити јенсенове једнакости (1.10) и (1.11) узимајући* $p = q = 1/2$, $x_1 = 3$ *и* $x_2 = 4$.

[16] Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1859-1925)

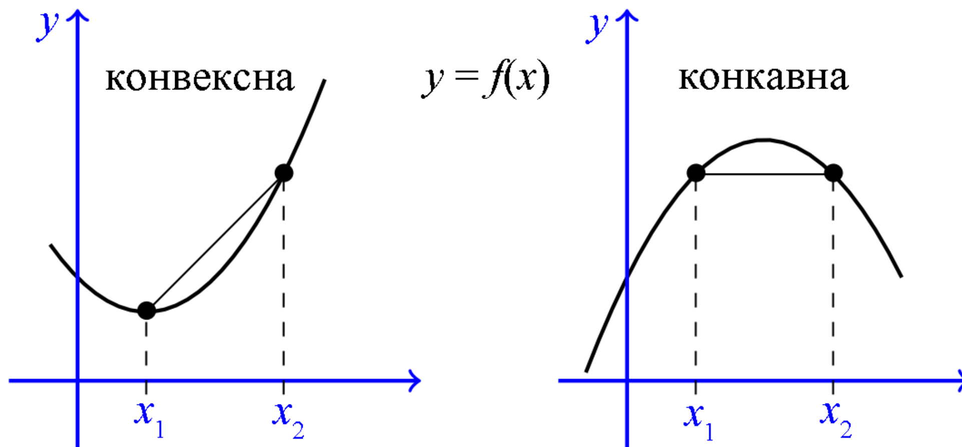
Рјешење. За квадратну, односно корену функцију имамо, редом:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4\right)^2 \le \frac{1}{2}\cdot 3^3+\frac{1}{2}\cdot 4^2, \quad \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4} \ge \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{4},$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{9+16}{2}, \quad \sqrt{\frac{7}{2}} \ge \frac{\sqrt{3}+\sqrt{4}}{2}.$$

Прва неједнакост се своди на тачну $49 \le 50$, а за десну након израчунавања корена добијамо $1,87083 \ge 1,86603$ што је такође тачно. □

На слици 1.19 су приказани графови функције $y = f(x)$ која је конвексна (лево) и конкавна (десно). Прва је удубљена, друга је испупчена. То значи да ће се дуж која спаја две тачке графа десно цела налазити изнад графа, а одговарајућа дуж десно испод графа.



Slika 1.19: Конвексна и конкавна функција.

Задатак 1.4.21. *Када су апсцисе крајњих тачака дужи x_1 и x_2, тада:*

i. за свако $x \in (x_1, x_2)$ постоје два позитивна реална броја p и q, таква да је $p + q = 1$ и да је $x = px_1 + qx_2$;

ii. на конвексној функцији важи неједнакост (1.4);

iii. на конкавној функцији важи неједнакост (1.5).

Примјер 1.4.22. *Показати да за конвексну функцију $y = f(x)$ важи неједнакост*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3),$$

гдје су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ позитивни реални бројеви такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Доказ. Нека је $\lambda_1 \neq$. Тада је $1 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$, па имамо редом:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) &= f\left(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{1-\lambda_1}\right) \\
&\le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{1-\lambda_1}\right) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}\right) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} x_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} x_3\right) \\
&\le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3} f(x_2) + \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3} f(x_3)\right) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3).
\end{aligned}$$

□

Задатак 1.4.23. *Експоненцијална функција $f(x) = 2^x$ је конвексна на целом свом домену $x \in \mathbb{R}$. Тестирати јенсенову неједнакост за коефицијенте $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ и аргументе $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.*

Задатак 1.4.24. *За конвексну функцију $y = f(x)$ важи јенсенова неједнакост*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

гдје $n \in \mathbb{N}$, за свако $k = 1, 2, \dots, n$ је $\lambda_k > 0$, при чему $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Приметимо да неједнакост 1.4.24 постаје једнакост ако и само ако $x_1 = \dots = x_n$. Друго, да обрнута неједнакост „$\ge$“ важи за конкавну функцију, јер ако је $y = f(x)$ конвексна, онда је функција $y = -f(x)$ конкавна.

Задатак 1.4.25. *Успоставити бијекцију између елемената пребројивог скупа $\mathbb{N}$ природних бројева и:*

i. свих парних природних бројева;
ii. скупа целих бројева $\mathbb{Z}$;
iii. скупа рационалних бројева $\mathbb{Q}$.

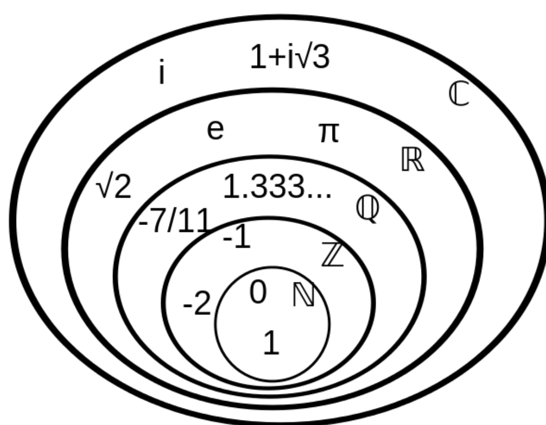
Ово значи да су скупови $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ пребројиви, да имају исти број елемената $\aleph_0$ (алеф нула). Међутим, скуп $\mathbb{R}$ је непребројив. Број елемената скупа реалних бројева, тј. његов *кардинални број*, је је $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ и називамо га *континуум*.

Задатак 1.4.26. *Доказати да нема бијекције између скупова $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$, природних и реалних бројева.*

Glava 2

Бројеви

Бројеви нам служе за бројање, мерење и означавање. За најважније скупове бројева у математици имамамо посебне ознаке, то су: скуп природних бројева $\mathbb{N}$, целих $\mathbb{Z}$, рационалних $\mathbb{Q}$, ирационалних $\mathbb{I}$, реалних $\mathbb{R}$ и комплексних $\mathbb{C}$.



Slika 2.1: Скупови бројева.

Посебни бројеви су *цифре*, за које пордразумевамо да су декадне 0,1,2,…, 9. Њима дефинишемо базу бројевног система и све остале бројеве.

2.1 Цели бројеви

Цели бројеви су цифре базе бројевног система, позитивни и негативни природни бројеви. У бинарној бази имамо само две цифре 0 и 1 па бројеве пишемо следећим редом: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011,…. У декадном систему, то су бројеви 0, 1, 2,…,9, 10, 11,…. Како једноцифрених бинарних бројева може бити 2, двоцифрених $2 \cdot 2$, троцифрених $2 \cdot 2 \cdot 2$, то нам даје идеју како правити конверзију декадних у бинарне бројеве и обратно.

Примјер 2.1.1. *Превести декадни број 29 у бинарни, октални и хексадецимални.*

Рјешење. Број $n = 29$ базе 10 преводимо у број n_b базе $b = 2, 8, 16$. Делимо број базом и добијамо количник и остатак, затим опет делимо количник и добијамо нови мањи количник и нови остатак, па опет, до нуле. Остатке напишемо у обрнутом редоследу и то је дати број дате базе.

$29 \to 11101_2$, јер: $29 : 2 \to 14\ 1$, $14 : 2 \to 7\ 0$, $7 : 2 \to 3\ 1$, $3 : 2 \to 1\ 1$, $1 : 2 \to 0\ 1$.

$29 \to 35_8$, јер: $29 : 8 \to 3\ 5$, $3 : 8 \to 0\ 3$.

$29 \to D1_{16}$, јер: $29 : 16 \to 1\ 13$, $13 : 16 \to 0\ 13$, а цифре A, B, C, D, E, F означавају бројеве $10, 11, 12, 13, 14, 15$. □

Задатак 2.1.2. *Превести бројеве* $100011_2, 4307_8, BC12_{16}$ *у декадне.*

Знамо да су прости бројеви они природни бројеви, осим јединице, који су дељиви само јединицом и самим собом. То је бесконачан низ бројева:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \dots \quad (2.1)$$

Просте бројеве називамо и *прим* бројеви.

Примјер 2.1.3. *Допунити дати низ са неколико нових прим бројева.*

Рјешење. Алгоритам се назива Ератостеново сито. Напишемо у низу све природне (или овдје наведене просте) бројеве од 2 до $n = 170$.

$$\dots, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, \dots \quad (2.2)$$

Уочимо у низу први број који није ни подвучен ни прецртан и подвучемо га а затим прецртамо све његове вишекратнике у низу. Ако су сви бројеви низа означени (подвучени или прецртани), поступак је завршен; у противном, понављамо претходни корак. □

Примјер 2.1.4. *Број простих бројева је бесконачан.*

Доказ. Претпоставимо да је број простих бројева коначан и нека су то бројеви $p_1, p_2, \dots, p_n$, поредани по величини. Посматрајмо број $q = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Број q није дељив нити са једним од n бројева p_i, јер подељен са сваким од њих даје остатак 1. Како је $q > 1$ биће то прост број већи од p_n, или сложен број који има прост фактор већи од p_n. У оба случаја смо у контрадикцији са претпоставком да нема више простих бројева. Дакле, број простих бројева не може бити коначан. □

Примјер 2.1.5. *Ако је* n *природан број и* $2^n - 1$ *прост, онда је и* n *прост број.*

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење, да је $2^n - 1$ сложен број, ако је n сложен број. Нека је $n = rs$ за оба $r, s > 1$. Тада је $2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1$. Отуда

$$2^n - 1 = (2^r - 1)[(2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \dots + 1],$$

а то је сложен број. □

У доказу је кориштена општа формула

$$a^s - 1 = (a-1)(a^{s-1} + a^{s-2} + \dots + 1), \tag{2.3}$$

која се лако проверава непосредним множењем и сређивањем на десној страни. Посебно, за $s = 2$ имамо познату „разлику квадрата“, а за $s = 3$ „разлику кубова“:

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1), \quad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1),$$

које се такође могу проверити множењима на десним странама једнакости.

Непотпуна индукција је закључивање којим се из појединачних ставова који се односе на ограничен број случајева изводи један општи став. Такав закључак се обично назива емпиријска или *непотпуна* индукција, који у математици има значај само као једна разумна хипотеза.

Пре 25 векова су Кинези су мислили да је број $n \in \mathbb{N}$ прост ако и само ако је број

$$K_n = 2^n - 2 \tag{2.4}$$

дељив са n. До тог исказа су вероватно дошли непотпуном индукцијом, јер је тачан за све бројеве $n < 341$ али не и даље. Почев од $n = 341 = 11 \cdot 31$ има бесконачно много сложених бројева n са којим је дељив K_n.

Задатак 2.1.6. *Показати да је K_{11} дељиво са 11 и да K_{12} није дељиво са 12.*
Доказати да је $K_{341} = 2^{341} - 2$ дељиво са $341 = 11 \cdot 31$.

Бројеви који се добијају помоћу формуле

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

називају се *Ферматови* бројеви.

Задатак 2.1.7. *Показати да су првих пет Ферматових бројева прости:*

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65\,537$$

На основу оваквог налаза је Фермат[1] претпостављао да су сви његови бројеви прости. Међутим

$$F_5 = 4\,294\,967\,279 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Дељивост F_5 са 641 је утврдио Ојлер[2] 1732. године. Касније је доказано да су сви Ферматови бројеви $F_5, F_6, \dots, F_{16}$ сложени.

Примјер 2.1.8. *Бројеви $P_n = n^2 + n + 41$ су прости редом за $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. Међутим, број $P_{40} = 41^2$ није прост.*

[1]Pierre de Fermat (1601-1665) француски правник и математичар.
[2]Leonhard Euler (1707-1783(швајцарски математичар који је радио у Русији.

Због поменутих превида, у математици се индукцијом назива следећи принцип доказивања: „ Ако $1 \in \mathbb{M}$ и ако из $n \in \mathbb{M}$ следи $n+1 \in \mathbb{M}$, тада је $\mathbb{M} = \mathbb{N}$." Ту је $\mathbb{N}$ скуп свих природних бројева, а $\mathbb{M}$ је његов потскуп за који је дати исказ истинит.

Дакле, исказ је истинит за сваки природни број:

1. ако је истинит за број 1 и

2. ако из претпоставке да је истинит за природни број $k \ge 1$ следи да је истинит за број $k+1$.

Оба, први и други корак принципа математичке индукције су неопходни. Већ смо видели шта се може десити ако нема другог корака, а у следећим примјеру је грешка због одсуства првог.

Примјер 2.1.9. *Показати да за тврђење*

$$T_n: \ 1^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$$

важи импликација $(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n \Rightarrow T_{n+1}$*, али да* T_1 *ипак није тачно.*

Рјешење. Након додавања 2^{n+1} обема странама једнакости T_n, добијамо T_{n+1}. Међутим, T_1 није тачно, јер је на левој страни једнакости 1, а на десној 2^2, . □

За доказ следећих (тачних) тврђења употребите (математичку[3]) индукцију[4].

Задатак 2.1.10. *Доказати да за свако* $n \in \mathbb{N}$*:*

a. $3|(4^{n+1} + 2)$,

b. $9|(3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4)$.

Задатак 2.1.11. *Доказати да важе неједнакости:*

a. $2^n > n$, *ако је* $n = 0, 1, 2, \dots,$

b. $2^n > n^2$ *ако је* $n = 5, 6, 7, \dots,$

c. $2^n > n^3$ *ако је* $n = 10, 11, 12, \dots,$

Нека $a, b \in \mathbb{N}$ од којих један може бити и нула. За број $k \in \mathbb{Z}$ кажемо да је *заједнички делитељ* бројева a и b ако је $k|a$ и $k|b$. Највећи позитиван цео број који је делитељ и од a и од b, назива се највећи заједнички делитељ[5] бројева a и b. Означавамо га са $\text{NZD}(a, b)$. Најмањи природни број са којим је дељив и a и b назива се најмањи заједнички садржалац тих бројева. Означавамо га $\text{NZS}(a, b)$.

Примјер 2.1.12. *Највећи заједнички делитељ два цела броја, од којих је бар један различит од нуле, је јединствен.*

Доказ. Ако је $d = \text{NZD}(a, b)$ и $d' = \text{NZD}(a, b)$, онда $d|d'$ и $d'|d$ одакле следи $d = d'$. □

Примјер 2.1.13. *Помоћу Еуклидовог алгоритма делења наћи* $\text{NZD}(936, 588)$.

[3] у математици подразумевамо да је индукција математичка, иначе је називамо непотпуна

[4] в. и задатке 1.2.25 и 1.2.26

[5] в. задатак 1.3.24

Рјешење.

$$\begin{array}{rcl} 936 &=& 1\cdot 588 + 348,\\ 588 &=& 1\cdot 348 + 240,\\ 348 &=& 1\cdot 240 + 108,\\ 240 &=& 2\cdot 108 + 24,\\ 108 &=& 4\cdot 24 + 12,\\ 24 &=& 2\cdot 12. \end{array}$$

Дакле, $\text{NZD}(936, 588) = 12$. □

Уопште, према Еуклидовом алгоритму[6], за $a, b \in \mathbb{N}$ и $a > b$ одређујемо количнике q_i и остатке r_i низом $i \le i \le k+1$ дељења:

$$\begin{array}{rcll} a &=& q_1 b + r_1, & 0 < r_1 < b;\\ b &=& q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1;\\ r_1 &=& q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2;\\ &\dots& & \\ r_{k-3} &=& q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, & 0 < r_{k-1} < r_{k-2};\\ r_{k-2} &=& q_k r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1};\\ r_{k-1} &=& q_{k+1} r_k + 0. & (r_{k+1} = 0) \end{array}$$

Низ остатака $r_1, r_2, \dots, r_k$ је опадајући низ природних бројева мањих од b и завршава се бројем $r_k = \text{NZD}(a, b)$.

Задатак 2.1.14. *Одредити највећи заједнички дијелилац датих бројева.*

$$\text{NZD}(455, 385), \quad \text{NZD}(996, 918), \quad \text{NZD}(2247, 2033)$$

Када је $a_1, a_2, \dots, a_n$ низ ненегативних целих бројева од којих је бар један различит од нуле, за највећи позитиван цео број d који је делитељ свих тих бројева, кажемо да је њихов највећи заједнички делитељ. Израчунавамо га вишеструком применом Еуклидовог алгоритма и означавамо са $\text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Примјер 2.1.15. *Када $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ и $n \ge 3$, тада је*

$$\text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{NZD}(\text{NZD}(a_1, \text{NZD}(a_2, \dots, a_n))).$$

Доказ. Нека су $d = \text{NZD}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $d' = \text{NZD}(a_1, \text{NZD}(a_1, \dots, a_n))$. Из $d|a_i$ за све $i = 1, 2, \dots, n$ следи $d|\text{NZD}(a_1, \dots, a_n)$ и наравно $d|a_1$, па $d|d'$. Обратно, из $d'|\text{NZD}(a_2, \dots, a_n)$ и $d'|a_1$ следи $d'|a_i$ за свако $i = 1, 2, \dots, n$, па $d'|d$. Отуда $d = d'$. □

Задатак 2.1.16. *Наћи највећи заједнички дијелилац:*

$$\text{NZD}(420, 126, 525), \quad \text{NZD}(529, 1541, 1817), \quad \text{NZD}(1275, 855, 2310).$$

[6] в. примјер 1.3.20

Наравно, највећи заједнички дијелилац се може наћи и на друге начине осим помоћу Еуклидовог алгоритма. Следећа метода[7] заобилази поменуто израчунавање парова.

Примјер 2.1.17. *Три штапа дужина 48 cm, 60 cm и 90 cm треба исећи на комаде једнаких максималних дужина.*

Рјешење.

48	60	90	2
24	30	45	3
8	10	15	1

Дакле, $\text{NZD}(48, 60, 90) = 2 \cdot 3 = 6$. Штапови требају бити дужине 6 cm, а биће их $8 + 10 + 15 = 33$ комада. ☐

Ради поређења, у следећем примјеру истом методом тражимо најмањи заједнички садржилац NZS три броја. За NZD тражимо заједничке делитеље сваког броја у ретку, а за NZS тражимо их за бар неког од од тих бројева.

Примјер 2.1.18. *Јелена, Марија и Биљана често иду у школску библиотеку. Јелена иде сваких 4 дана, Марија сваких 6 дана, Биљана сваких 8 дана. Ког датума у септембру ће све три поново заједно посетити библиотеку ако се зна да су то учиниле 2. септембра?*

Рјешење. Тражимо најмањи заједнички садржилац бројева 4, 6 и 8:

4	6	8	2
2	3	4	2
1	3	2	2
1	3	1	3
1	1	1	1

Дакле, $\text{NZS}(4, 6, 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. То значи да ће до поновног сусрета доћи 26. септембра. ☐

Задатак 2.1.19. *Од бројева 12, 32 и 42, која два имају:*
i. највећи заједнички дијелилац број 4;
ii. најмањи заједнички садржалац број 84.
iii. Наћи $\text{NZD}(12, 32, 42)$.
iv. Наћи $\text{NZS}(12, 32, 42)$.

Када су a и b цели бројеви и $ab \neq 0$, једначина облика

$$ax + by = c, \tag{2.6}$$

при чему су и вриједности x и y из скупа целих бројева, назива се *линеарна Диофантова једначина*, по Диофанту који је био грчки математичар из Александрије, који је живео у 3. веку наше ере.

[7] в. сајт `http://pismenizadaci.com/`

Примјер 2.1.20. *Доказати да линеарна Диофантова једначина (2.6) има рјешење ако и само ако* $d|c$*, гдје је* $d = \text{NZD}(a,b)$.

Доказ. Нека је $d = \text{NZD}(a,b)$. Претпоставимо да је (x_0, y_0) рјешење једначине. Тада је $ax_0 + by_0 = c$. Како је $d|a$ и $d|b$, то је $d|c$.

Обрнуто, претпоставимо да $d|c$. Тада постоји цео број k такав да је $c = kd$. Са друге стране, постоје[8] цели бројеви x' и y' такви да је, редом:

$$ax' + by' = d,$$

$$ax'k + by'k = dk,$$

$$a(kx') + b(ky') = c.$$

Дакле, добијено је једно рјешење $(x_0, y_0) = (kx', ky')$ Диофантове једначине (2.6). □

На основу горњег примјера и Еуклидовог алгоритма имамо метод за тражење једног решења Диофантове једначине.

Примјер 2.1.21. *Диофантова линеарна једначина*

$$28x + 70y = 39$$

нема решења, јер је $14 = \text{NZD}(28, 70)$*, а 14 није делитељ броја 39.*

Примјер 2.1.22. *Решити линеарну Диофантову једначину*

$$13x + 32y = 5.$$

Рјешење. Овдје су $a = 13$ и $b = 32$, два релативно проста броја. У складу са 1.3.25, број $\text{NZD}(a,b) = 1$ представљамо као збир $1 = 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 32$, који множимо са $c = 5$ и добијамо $25 \cdot 13 + (-10) \cdot 32 = 5$. Према томе, једно од решења дате Диофантове једначине је $(25, -10)$. Лако се проверава да су решења и

$$x = 25 + 32z, \quad y = -10 - 13z, \quad z \in \mathbb{Z}$$

за произвољан цео број z. □

Примјер 2.1.23. *Решити Диофантову једначину*

$$432x + 522y = 0.$$

Рјешење. Овдје су $a = 432$ и $b = 522$ са $\text{NZS}(a,b) = 18$. Међутим, $c = 0$, што отвара другу могућност, да посматрамо количник

$$\frac{x}{y} = -\frac{522}{432} = -\frac{29z}{24z}.$$

Отуда, решења дате једначине су

$$x = -29z, \quad y = 24z,$$

гдје је z произвољан цео број осим нуле. □

[8] в. задатак 1.3.25

Задатак 2.1.24. *Решити Диофантову једначину*

$$258x + 147y = 369.$$

Задатак 2.1.25. *Решити Диофантове једначине:*

$$97x + 35y = 13, \quad 98x + 35y = 13, \quad 98x + 35y = 14.$$

Све методе решавања линеарне Диофантове једначине (2.6) са две променљиве, лако се поопштавају на одговарајућу линеарну Диофантову једначину

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z} \tag{2.7}$$

са захтевом за целобројна решења $x_1, \dots, x_n$. Ова једначина такође има решења само ако $\text{NZD}(a_1, \dots, a_n)|b$.

Блиске Диофантовим једначинама су *линеарне конгруенције*

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n \equiv b \pmod{m}, \tag{2.8}$$

које опет, имају решења ако и само ако $\text{NZD}(a_1, \dots, a_n, m)|b$.

Наиме, (2.7) је еквивалентно са $a_1x_1 + \dots a_nx_n - my = b$, а то је линеарна једначина која има решења у скупу целих бројева ако и само ако $\text{NZD}(a_1, \dots, a_n, m)|b$.

Примјер 2.1.26. *Конгруенција* $42x \equiv 60 \pmod{91}$ *нема решења, јер* $\text{NZD}(42, 91) = 7$ *није делитељ од 60.*

Примјер 2.1.27. *Конгруенција*

$$42x \equiv 50 \pmod{76}$$

има рјешење, јер је $\text{NZD}(42, 76)$ *делитељ од 50.*

Рјешење. Скраћивањем добијамо $21x \equiv 25 \pmod{38}$. Затим, приметимо да важи:

$$21x \equiv 25 \equiv 25 + 38 \equiv 63 \pmod{38}.$$

Како су 21 и 38 узајамно прости, можемо делити са 21 и добијамо рјешење

$$x \equiv 3 \pmod{38}.$$

Отуда су

$$x \equiv 3 \pmod{76}, \quad x \equiv 41 \pmod{76}$$

решења по модулу 76. □

2.2 Разломци

Скуп бројева који се могу добити дељењем целих бројева означавамо са

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.9}$$

Елементе тог скупа називамо рационалним бројевима или разломцима.

Задатак 2.2.1. *Бранко једе две кришке колача, док Сара поједе једну. Ако Бранко поједе 2/4 колача а све кришке су исте величине, који део колача остаје након што су Бранко и Сара јели.*

Задатак 2.2.2. *Ана и Ацо деле 18 колача. Ана је појела 1/6 колача. Ацо је појео 1/3 колача. Колико је колача остало?*

Задатак 2.2.3. *Марија ради* $4\frac{1}{2}$ *часова у понедељак,* $2\frac{1}{2}$ *у уторак и* $6\frac{1}{2}$ *у петак. Марија је радила три седмице. Колико часова укупно?*

Задатак 2.2.4. *Рационалан број 5/7 је настао скраћивањем рационалног броја чији бројилац и именилац имају збир 204. Одредити првобитни разломак.*

Задатак 2.2.5. *Казаљке часовника показују 9 часова. После колико времена ће се оне први пут поклопити? Колики ће угао бити између казаљки у 10:10?*

Задатак 2.2.6. *Колико укупно секунди има 1 час, 32 минуте и 4 секунде? Колико часова, минута и секунди имају 5524 секунде?*

Задатак 2.2.7. *Представити следеће периодичне децималне бројеве*

$$0,444\dots, \quad 0,565656\dots, \quad 0,123123123\dots,$$

$$2,555\dots, \quad 13,141414\dots, \quad -56,789789789\dots$$

помоћу количника целих бројева.

Задатак 2.2.8. *Једна инча има 12 стопа. Превести у децимални број стопа следеће бројеве инча:*

$$13, \quad 38, \quad 63, \quad 88.$$

Декадну базу подразумевамо, другу базу $b \neq 10$ пишемо у индексу броја. Тако број $1101,101_2$ из бинарног система $(b = 2)$ у декадном систему пишемо $13,625$, јер је $1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-2} = 13,625$. Обратно, цели део декадног броја (прво 13, а затим количнике) делимо са $b = 2$ и напишемо остатке уназад, као у примјеру 2.1.1, а децимални део множимо бројем $b = 2$ и пишемо целе делове истим редоследом.

Задатак 2.2.9. *Превести број* $12,012_3$ *у декадни број и назад.*

Задатак 2.2.10. *Превести* $0,456$ *у бинарни, октални и хексадецимални број.*

Задатак 2.2.11. *Представити следеће периодичне децималне бројеве*

$$0,999\dots,\quad 0,4999\dots,\quad 0,111\dots,\quad 0,0714285714285\dots$$

у бинарном систему бројева.

Антички Египћани су користили само разломке облика $1/n$ (половина, трећина, четвртина, ...) чијим сабирање би добијали остале[9]. Тако је $1/2+1/4=3/4$, или $1/2+1/3+1/4=6/7$. Сваки разломак је могуће представити као збир египатских[10].

Задатак 2.2.12. *Представити следеће разломке помоћу збира египатских.*

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{4}{5}.$$

Скратити разломак mk/nk значи поделити бројник mk и називник nk истим бројем $k\ne 0$. Резултат је разломак m/n. Подразумевају се ознаке (2.9).

Задатак 2.2.13. *Скратити разломке:*

$$\frac{13^3-11^3}{13^2+13\cdot 11+11^3},\quad \frac{15^3+17^3}{15^2-15\cdot 17+17^2},$$
$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4},\quad \frac{a-b}{a^5-b^5},\quad \frac{a^3+b^3}{a^6+b^6}.$$

Задатак 2.2.14. *Одредити цифре x и y тако да број $2015xy$ буде дељив са 7 и са 11.*

Задатак 2.2.15. *Ако[11] се разломак $\frac{2aa4b}{bab}$, гдје су a и b непознате декадне цифре, може скратити са 9, онда се он може скратити и са 36.*

Супротна операција скраћивању је проширивање разломака, односно множење бројника и називника истим бројем (различитим од нуле). Када разломке сабирамо проширујемо их до једнаких називника, а затим сабирамо бројнике и преписујемо називник.

Задатак 2.2.16. *Извршити назначене операције:*

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{2},\quad \frac{11}{21}-\frac{5}{7}+\frac{1}{3},\quad -\frac{7}{9}+\frac{3}{4}+\frac{11}{6}.$$

Када разломак множимо бројем, множимо само бројник. *Двојни разломак*, количник два разломка $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$, поједностављујемо по обрасцу

$$\frac{\frac{m_1}{n_1}}{\frac{m_2}{n_2}}=\frac{m_1\cdot n_2}{m_2\cdot n_1}, \tag{2.10}$$

тј. производ вањских елемената m_1 и n_2 је бројник резултата, а производ унутрашњих m_2 и n_1 је називник.

[9] То је нађено на чувеном Ринд папиру из око 1650. г.п.н.е.

[10] Odd greedy expansion: `https://en.wikipedia.org/wiki/Odd_greedy_expansion`

[11] Федерално такмичење математичара БиХ за VII разреде основних школа одржано у Илијашу, 14. маја 2011. године

Задатак 2.2.17. *Поједноставити изразе:*

$$\frac{a-\frac{b^2}{a}}{b-\frac{a^2}{b}}, \quad \frac{1-2\cdot\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}{1-\frac{b}{a}}, \quad \frac{8\cdot\frac{a^3}{b^3}-1}{4\cdot\frac{a^2}{b^2}+2\cdot\frac{a}{b}+1}, \quad \frac{27+\frac{a^3}{b^3}}{\frac{a^2-3ab}{b^2}+9}.$$

У ком случају дати изрази немају смисла (имају дељење нулом)?

Редукован разломак је разломак скраћен до краја, тако да се више не може скраћивати. То је разломак m/n чији бројник m и називник n су узајамно прости бројеви, тј. када је $\text{NZS}(m,n)=1$. Увек се може писати:

$$\frac{m}{n}=\frac{n+(m-n)}{n}=1+\frac{m-n}{n}, \tag{2.11}$$

па ако m/n није (јесте) редукован онда је такав и разломак $(m-n)/n$. На примјер,

$$\frac{6}{4}=\frac{4+2}{4}=1+\frac{2}{4}.$$

Разломак (6/4) чији је бројник (6) већи од називника (4) назива се *неправи* разломак. Обратно, разломак (2/4) чији бројник (2) је мањи од називника (4) називамо *прави* разломак. Ово даје идеју за решавање следећег задатка.

Задатак 2.2.18. *Показати да су за свако $z\in\mathbb{Z}$ следећи разломци редуковани*[12]*:*

$$\frac{35z+9}{15z+4}; \quad \frac{14z+3}{21z+4}.$$

Исто се може доказивати претпоставком да дати разломак није редукован, да је облика mk/nk за $k\ge 2$, и свођењем на контрадикцију.

Задатак 2.2.19. *Доказати да су за свако $z\in\mathbb{Z}$ следећи разломци редуковани:*

$$\frac{13z+6}{11z+5}, \quad \frac{2z+3}{5z+7}.$$

Реципрочни бројеви су они чији производ је један. Разломке делимо тако што множимо први са реципрочним другим:

$$\frac{m_1}{n_1}:\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{n_2}{m_2}=\frac{m_1\cdot n_2}{m_2\cdot n_1}. \tag{2.12}$$

Дакле, резултат је исти као и за „двојни разломак“ (2.10).

Следећи задаци су су били на пријемним испитима[13] на факултетима у Београду, Шумарском и Техничком, у периоду 1991-1995. године.

[12]Међународна математичка олимпијада 1959. године:
http://www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1959_IMO_Problems/Problem_1

[13]в. приручник [9]

Задатак 2.2.20. *Израчунати вриједности израза:*

$$\frac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{(1,5+\frac{1}{4}):18\frac{1}{3}},$$

Задатак 2.2.21. *Скратити разломак:*

$$\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}.$$

Задатак 2.2.22. *За* $a\neq\pm 2$, *поједноставити израз:*

$$\left(\frac{a+1}{a^2-4}+\frac{1-a^2}{a^3+8}\right):\frac{1}{(a-1)^2+3}.$$

Задатак 2.2.23. *Када је* $|x|\neq|y|$ *поједноставити израз:*

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

Задатак 2.2.24. *За* $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ *поједноставити:*

$$\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a^3+1}{a^4-a}\right):\frac{a+1}{a-a^2}.$$

Задатак 2.2.25. *Ако је* $ab\neq 0$ *и* $a\neq b$, *наћи:*

$$\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right]\cdot\left[\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right]:\frac{a^3-b^3}{ab}.$$

Задатак 2.2.26. *Скратити разломак:*

$$\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2},\quad a\neq b,3b/2.$$

Задатак 2.2.27. *Поједноставити израз:*

$$\left[\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}\right]:\frac{1}{3(a+b)}.$$

гдје стоји $x^{-1}=1/x$ *и* $x^{-2}=1/x^2$.

Задатак 2.2.28. *Скратити разломак:*

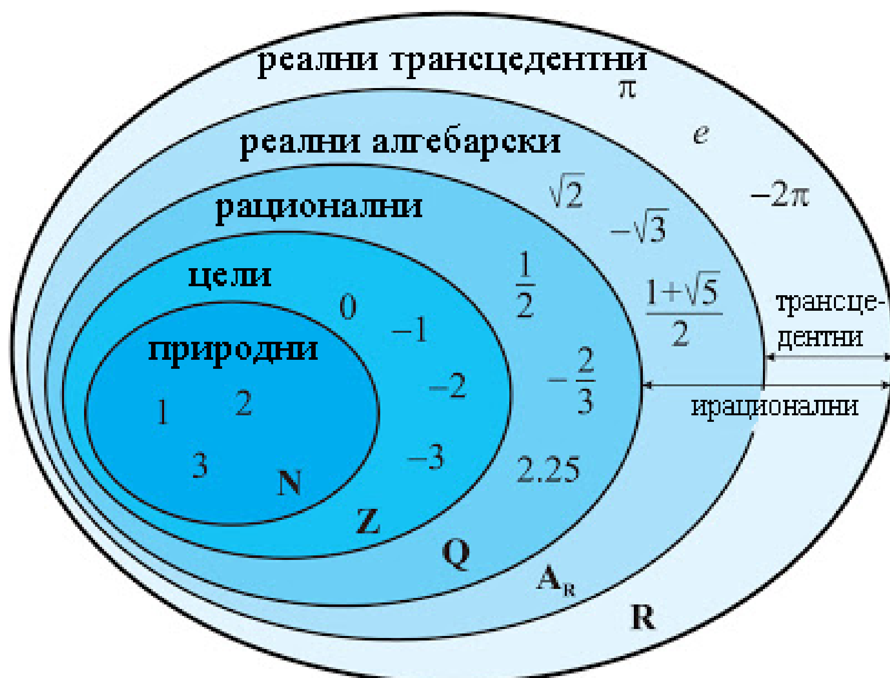
$$\frac{2^{2x}-4\cdot 2^x+3}{2^{x/2}-1},$$

гдје је $(2^{x/2})^2=2^x$, *односно* $(2^x)^2=2^{2x}$ *за свако* $x\in\mathbb{Z}$.

2.3 Реални бројеви

Реалан број који није рационалан називамо *ирационалан.* Према томе, скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ делимо на два дисјунктна скупа бројева, скуп рационалних $\mathbb{Q}$ и ирационалних бројева $\mathbb{I}$.

Знамо да су рационални они које можемо представити помоћу разломака (2.9), па су ирационални они који се не могу представљати на тај начин. Са друге стране, рационални бројеви се могу писати помоћу периодичних децималних бројева[14], па су онда ирационални они који се пишу помоћу непериодичних децималних бројева. Скуп рационалних бројева је пребројив (има их $\aleph_0$ - „алеф нула“), а ирационалних непребројив[15] (има их $\mathfrak{c}$ - „континуум“).



Slika 2.2: Реални бројеви.

Друга подела реалних бројева је на реалне *алгебарске* и *трансцедентне* бројеве. Алгебарски бројеви су они који се могу добити кореновањем, нпр. $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{5}$, затим сабирањем (укључујући одузимање) и множењем (дељењем) таквих. Трансцедентни су ирационални бројеви који нису алгебарски, нпр. $\pi = 3,14159\dots$ или $e = 2,71828\dots$, и они који се могу добити сабирањима и множењима таквих.

Задатак 2.3.1. *Доказати да број* $\sqrt{6}$ *није рационалан.*

Ирационалним називамо реалан број који није рационалан.

[14] в. задатак 2.2.7

[15] в. задатак 1.4.26

Задатак 2.3.2. *Доказати да је број* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *ирационалан.*

Збир два ирационална броја, рецимо $2+\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$, може бити рационалан број.

Задатак 2.3.3. *Доказати да су ирационални бројеви:*

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}, \quad \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

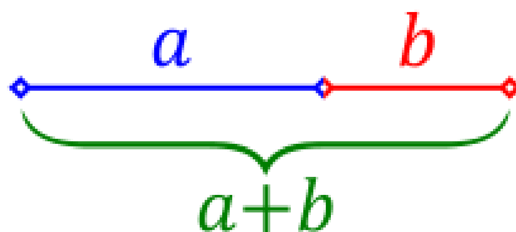
Задатак 2.3.4. *Ако је* n *природан број и није квадрат неког природног броја доказати да је тада број* $n+\sqrt{n}$ *ирационалан.*

Задатак 2.3.5. *Доказати да је број* $\sqrt[3]{2}$ *ирационалан.*

Број је алгебарски, ако је рјешење (ненулте) полиномске једначине са рационалним коефицијентима.

Задатак 2.3.6. *Ако је* $q \in \mathbb{Q}^+$ *(позитиван рационалан број) показати да су бројеви* $q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots$ *алгебарски.*

Златни пресек је подела дужи на два дела a и b којом се цела дуж односи према већем делу као већи део према мањем. Тада је $(a+b):a=a:b$.



Slika 2.3: Златни пресек $(a+b):a=a:b$.

Златни бројеви су реципрочни количници $\Phi=a/b$ и $\phi=b/a$ који представљју односе делова добијених геометријском златном поделом, као на слици 2.3.

Задатак 2.3.7. *Показати да је ирационалан број* $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,61803\dots$ *златни број и рјешење алгебарске једначине* $x^2+x-1=0$.

Задатак 2.3.8. *Показати да је ирационалан број* $\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1,61803\dots$ *златни број и рјешење алгебарске једначине* $x^2-x-1=0$.

Задатак 2.3.9. *Показати да је:*

$$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}, \quad \phi=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\dots}}}.$$

Задатак 2.3.10. *Проверити верижни разломак:*

$$\Phi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}.$$

Апсолутна вриједност $|r|$ реалног броја $r \in \mathbb{R}$ је позитиван број или нула. Када је $r \ge 0$ тада је $|r| = r$, а када је $r \le 0$ тада је $|r| = -r$. То пишемо кратко:

$$|r| = \begin{cases} r, & r \ge 0 \\ -r, & r < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Задатак 2.3.11. *Применити (2.13) када r узима вриједност израза:*

$$x - 1, \quad 1 - x, \quad 2x - 3, \quad 2 - 3x.$$

Задатак 2.3.12. *Одредити* $|r|$ *када r узима вриједност:*

$$x^2 - 1, \quad 4 - x^2, \quad x^2 + x - 2, \quad -x^2 + 5x - 6.$$

Примјер 2.3.13. *Нацртати граф функције дефинисане изразом:*

$$f(x) = |x - 1| - 2,$$

а затим наћи рјешење једначине $f(x) = 0$.

Рјешење. Имамо редом:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) - 2, & x - 1 \ge 0 \\ -(x-1) - 2, & x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3, & x \ge 1 \\ -x - 1, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} y_+, & x \ge 1 \\ y_-, & x < 1 \end{cases}$$

гдје је $y_+(x) = x - 3$ функција која важи само за аргументе $x \ge 1$, а $y_-(x) = -x - 1$ је функција која важи само за $x < 1$. Сваку цртамо посебно у њеном домену, као на слици 2.4. На слици видимо да је $f(x) = 0$, тј. ордината је нула када функција пресеца апсцису, у тачкама $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. □

Задатак 2.3.14. *Нацртати граф функције дефинисане изразом:*

$$f(x) = |x - 2| - 1,$$

а затим наћи рјешење једначине $f(x) = 0$.

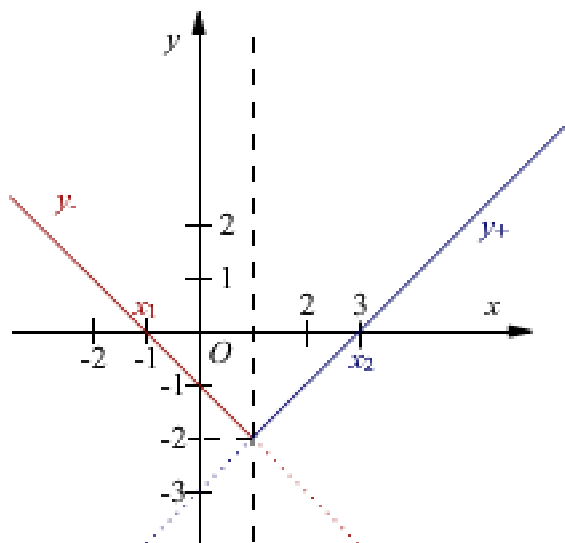
Задатак 2.3.15. *Решити једначине по* $x \in \mathbb{R}$:

$$|6x| = 5, \quad |2x - 3| = 4, \quad \left|\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right| = 3, \quad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{4}x\right| = 2,$$

Задатак 2.3.16. *Решити неједначине по* $x \in \mathbb{R}$:

$$|6x| \le 5, \quad |2x - 3| < 4, \quad \left|\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right| \le 3, \quad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{4}x\right| < 2,$$

$$|6x| > 5, \quad |2x - 3| \ge 4, \quad \left|\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\right| > 3, \quad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{4}x\right| \ge 2.$$



Slika 2.4: Граф функције $y = |x-1|-2$.

Задатак 2.3.17. *Доказати идентитете:*

$$\frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \frac{x-|x|}{2} = \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2, \quad \left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = \operatorname{sgn}(x)\cdot x^2,$$

где функција[16] $\operatorname{sgn}(x)$ *има вриједност* $+1$ *за* $x > 0$*, вриједност* 0 *за* $x = 0$ *и* -1 *за* $x < 0$.

За $A \subset \mathbb{R}$ функција $\max A$ даје највећи, а функција $\min A$ најмањи број $a \in A$. Скуп позитивних реалних бројева означавамо са $\mathbb{R}^+$, а негативних са $\mathbb{R}^-$.

Задатак 2.3.18. *Када је* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *доказати да је:*

$$\max\{a,b\} = \frac{|a+b|+|a-b|}{2}, \quad \min\{a,b\} = \frac{|a+b|-|a-b|}{2}.$$

Аритметичка, геометријска и хармонијска средина два броја $a, b \in \mathbb{R}^+$ је реалан број, редом:

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{2.14}$$

Ови изрази се лако поопштавају на случајеве када је $ab > 0$, а затим и на дуже низове реалних бројева.

[16]signum - знак броја: `https://en.wikipedia.org/wiki/Sign_function`

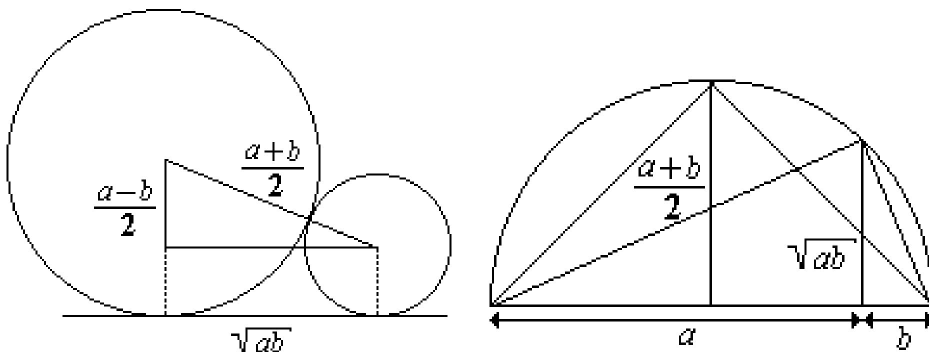
Примјер 2.3.19. *Доказати да за средине* (2.14) *увек важи:*

$$G = \sqrt{AH}, \quad H \le G \le A,$$

гдје уместо неједнакости стоји једнакост акко[17] $a = b$.

Доказ. Из (2.14) добијамо: $\sqrt{AH} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b}} = \sqrt{ab} = G$. Даље, из $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$ следи $a - 2\sqrt{ab} + b \ge 0$, односно $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, те $A \ge G$. Због $G = \sqrt{AH}$ и $G \le A$ добијамо $G \ge H$. □

Задатак 2.3.20. *Користећи слику 2.5 лево, доказати* $G(a,b) \le A(a,b)$, *при чему важи једнакост само ако* $a = b$.



Slika 2.5: i) $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. ii) Изоперметријски проблем.

Задатак 2.3.21. *Користећи слику 2.5 десно, решити тзв. изоперметријску неједнакост: „Међу свим паровима бројева са датим производом наћи онај чији је збир најмањи“.*

Задатак 2.3.22. *Возило иде из места A у место B. Наћи просечну брзину кретања возила у следећа два случаја.*

i. Током првог часа, возило се креће константном брзином 20 km/h. Затим нагло повећа брзину и током следећег часа се настави кретати константном брзином 30 km/h.

ii. Прву половину пута возило прелази константном брзином 20 km/h, а другу половину константном брзином 30 km/h.

Заокруживање[18] броја x је замењивање тог броја погоднијим бројем $\bar{x}$ тако да разлика $|x - \bar{x}|$ буде што је могуће мања. Тако, ирационалан број $\pi = 3,14159265\dots$ на две и четири децимале заокружићемо бројевима $\bar{\pi} = 3,14$ и $\bar{\pi}' = 3,1416$. Када је задња цифра 5 а број заокружујемо на предзадњу, онда ту предзадњу не мењамо ако је парна, а заокружујемо је на прву већу (парну) ако је непарна.

[17] акко - ако и само ако
[18] в. [11], стр. 73-82.

Заокруживање цифре 5 које се назива *правило парне цифре* је уведено ради смањивања кумулативне грешке рачунања, јер парних и непарних цифара има једнако (парне су 0, 2, 4 и 8, а непарне 1, 3, 5 и 9) и једнако су вероватне. Тако, број $x = 3,1415$ заокружујемо на број $\bar{x} = 3,142$ управо зато што не знамо да се ради о заокруживању броја π.

Разлику $\Delta(x) = x - \bar{x}$ између тачног броја x и његове апроксимације $\bar{x} \approx x$ називамо грешка приближног броја $\bar{x}$, а апсолутну вриједност $\Delta = |x - \bar{x}|$ називамо *апсолутном грешком*. Грешка може бити позитивна или негативна, док је апсолутна грешка увек позитивна. Сваки број Δ_x који није мањи од апсолутне грешке Δ назива се граница апсолутне грешке приближног броја $\bar{x}$. Дакле,

$$\Delta_x \ge \Delta = |\Delta(x)| = |x - \bar{x}|. \tag{2.15}$$

Граница апсолутне грешке није једнозначно одређена и приликом рачунања настојимо да она буде што мања.

Примјер 2.3.23. *Одредити границу апсолутне грешке приближног броја* $\bar{\pi} = 3,14$ *који замењује тачан број* π.

Рјешење. Из $3,14 < \pi < 3,15$ следи $\Delta = |\pi - 3,14| < 0,01$, па је $\Delta_\pi = 0,01$ једна граница апсолутне грешке приближног броја $\bar{\pi}$. И број $\Delta_\pi = 0,002$ је граница апсолутне грешке, јер је $3,140 < \pi < 3,142$. Према томе, можемо ставити $\pi = 3,14 \pm 0,01$ или тачније $\pi = 3,14 \pm 0,002$. □

Релативна грешка приближног броја $\bar{x} \ne 0$ је количник његове апсолутне грешке и апсолутне вриједности тог броја:

$$\delta(x) = \frac{|\Delta(x)|}{|\bar{x}|} = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}. \tag{2.16}$$

Сваки број δ_x који није мањи од релативне грешке $\delta(x)$ назива се граница релативне грешке приближног броја $\bar{x}$.

Примјер 2.3.24. *Нека је тачан број* $x \in [15,02; 15,10]$. *Изабрати неку његову апроксимацију из датог интервала, а онда одредити границе апсолутне и релативне грешке те апроксимације.*

Рјешење. За апроксимацију узмимо $\bar{x} = 15,06$. То је аритметичка средина датог интервала. Тада је $|x - \bar{x}| \le \frac{1}{2}(15,10 - 15,02) = 0,4$, па за границу апсолутне грешке можемо узети $\Delta_x = 0,4$. Зато је $\delta_x = |\Delta_x|/|\bar{x}| = 0,4/15,06 = 0,0266$ граница релативне грешке. □

Нека је дат реални број у запису

$$x = \pm c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} c_{-3} \dots, \tag{2.17}$$

гдје су c_i цифре датог бројевног записа, означене индексима $i \le n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. У подразумеваном декадном систему бројева, цифре су $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Значајне цифре реалног броја (2.17) су све цифре у његовом запису, почев од прве цифре са леве стране која је различита од нуле. Значајна цифра приближног броја је *сигурна* ако апсолутна грешка тог броја није већа од половине јединице која одговара тој цифри.

Код бројева $\underline{1{,}23}$ или $\pm 0{,}0\underline{1020}$ подвучене су значајне цифре. Сваки реални број (2.17) може се записати у облику

$$x = \pm(c_n b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \dots + c_1 b + c_0 + c_{-1}b^{-1} + \dots + c_{-m}b^{-m} + \dots), \quad n, m \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

гдје је подразумевана база бројног система $b = 10$. Цифре овог записа c_i су све значајне када је водећа $c_n \ne 0$. Цифра c_{-m} је сигурна ако апсолутна грешка тог приближног броја задовољава једнакост

$$\Delta = |\Delta(x)| \le \frac{1}{2} \cdot b^{-m}. \tag{2.19}$$

Када је нека значајна цифра приближног броја сигурна, онда су сигурне и све значајне цифре лево од ње.

Примјер 2.3.25. *Нека су* $\bar{a} = 42,00$ *и* $\bar{b} = 0,0304500$ *апроксимације бројева* $a = 41,95$ *и* $b = 0,03045007$. *Колико те апроксимације имају сигурних цифара?*

Рјешење. Из $|\Delta(a)| = |a - \bar{a}| = |41,95 - 42,00| = 0,05 \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ следи да је последња цифра броја $\bar{a}$ сигурна, а тиме и све цифре испред (лево од) ње. Дакле, приближан број $\bar{a}$ има сигурне три цифре. Слично је $\Delta(b)| = |b - \bar{b}| = 0,07 \cdot 10^{-6} \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ па закључујемо да број $\bar{b}$ има пет сигурних цифара. □

Задатак 2.3.26. *Показати да је:*

i. граница апсолутне грешке збира приближних бројева једнака збиру граница апсолутних грешака сабирака;

ii. збир приближних бројева има највише онолико сигурних цифара колико и сабирак са најмањим бројем сигурних цифара.

Задатак 2.3.27. *Сабрати приближне бројеве*

$$\bar{x}_1 = 0,5666 \quad \bar{x}_2 = 65,435 \quad \bar{x}_3 = 0,012345 \quad \bar{x}_4 = 234,5$$

чије су све цифре сигурне, па оценити грешку збира.

2.4 Примене пропорција

Задатак 2.4.1. *Ако 9 килограма шећера кошта* 10, 44 *евра колико килограма се могу добити за* 8, 12 *евра?*

Примјер 2.4.2. *Мајстор може обрадити* 270 *столица за* 24 *радна дана. Међутим, након* 8 *дана он добије још* 30 *таквих столица. Колико дана ће мајсторска обрада укупно трајати?*

столице	дани
270	24
210	x

Slika 2.6: Директна пропорција

Рјешење. Након 8 дана мајстор је завршио трећину посла, од којег му је преостало 180 столица. Са овима и још 30 нових он за следећих x дана треба да обради 210 столица. На слици 2.6 видимо да стрелице имају исти смер, јер више дана рада значи више урађеног посла. Имамо директну пропорцију, а односе у колонама формирамо низ стрелице:

$$x : 24 = 210 : 270.$$

Отуда $270x = 24 \cdot 210$, па је $x = 18$ и 2/3 дана. То је укупно 26 и 2/3 дана. □

Задатак 2.4.3. *Фармер има хране за 300 кокошију током 20 дана. Ако он купи још 100 кокошки, колико ће та храна трајати?*

Примјер 2.4.4. *Знамо да* 2 *радника за* 3 *дана асвалтирају* 4 *метра пута.*

i. Колико ће метара пута асвалтирати један радник за један дан?

ii. Колико ће метара пута асвалтирати 3 *радника за* 5 *дана?*

Рјешење. Демонстрирамо различите методе за решавање овог типа задатака.

i. За исто време, за три дана, ће дупло мање радника асвалтирати дупло мању деоницу пута, тј. 1 радник за 3 дана асвалтираће 2 метра. Исти радник за три пута мање времена урадиће трећину посла, тј. 1 радник за 1 дан асвалтираће 2/3 метара.

радника	дана	метара
2	3	4
3	5	x

Slika 2.7: Продужена пропорција

ii. Више асфалтираних метара ћемо добити ако имамо више радника, односно ако они раде више дана. Зато су на слици пропорција 2.7 стрелице за број радника

и број радних дана у истом смеру са бројем метара. У смеру стрелица формирамо односе

$$\begin{array}{ccccccc} x & : & 4 & = & 3 & : & 2 \\ & & & = & 5 & : & 3 \end{array}$$

одакле добијамо $x : 4 = (3 : 2) \cdot (5 : 3)$, тј. $x = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = 10$. Три радника ће за пет дана асвалтирати десет (10) метара пута. □

Задатак 2.4.5. *Решити претходни примјер 2.4.4 замењујући методе.*

Задатак 2.4.6. *Седам камиона за 12 сати потроши 756 литара горива. Показати да пет камиона за девет сати потроши 405 литара.*

Задатак 2.4.7. *Производ се складишти у сандуцима који се одлажу на простор дужине* 55*, ширине* 30 *и висине* 15 *сандука, укупне цене* 37 125 *долара. Колико сандука је висок протор на који има* 25 *редова сандука распоређених у* 75 *колона, ако је укупна њихова цена* 28 125 *долара?*

Задатак 2.4.8. *Решити претходни примјер 2.4.7 израчунавајући цену једног сандука и запремину целог простора.*

Задатак 2.4.9. *Лазар, Марко и Невена требају да поделе* 10 000 *динара у размери* $5 : 3 : 2$*. По колико ће они добити?*

Задатак 2.4.10. *Поделити дужину од* 100 *метара на четири дела тако да сваки следећи део буде* 20% *дужи.*

Последња два задатка су била из *рачуна смеше*, или поделе. Мало сложеније ситуације ћемо демонстрирати на следећа два примјера, помоћу две методе. Други примјер је са општим бројевима да би се лакше уочила јединственост резултата.

Примјер 2.4.11. *Раствор* 18% *алкохола помешан је са раствором* 24% *алкохола и добијена је смеша од* 3 *литре* 22% *алкохола. Колико је узето првог, а колико другог раствора?*

Рјешење. Прва смеса има x, а друга y литара. Из система једначина:

$$\begin{cases} 18x + 24y = 22 \cdot 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

након скраћивања прве прве једначине са 6, затим смене $y = 3 - x$ из друге у прву, добијамо $9x + 4(3 - x) = 11$, односно $x = 1$, а $y = 2$ литре. □

Примјер 2.4.12. *Колико треба узети сваке од две врсте робе, цена a и b, да би се добила мешавина количине m по цени c.*

Рјешење. Да би задатак имао рјешење, цена c мешавине мора бити између цена састојака. Нека је $a < c < b$. Ако по ценама a и b узимамо количине редом x и y, онда важи систем једначина:

$$\begin{cases} ax + by = c \cdot m \\ x + y = m \end{cases} \tag{2.20}$$

Из друге једначине замењујемо m у прву и добијамо $ax + by = c(x + y)$, а затим $x : y = (b - c) : (c - a)$. Ова пропорција се може представити графом на слици 2.8. Потребне количине су:

$$x = m \cdot \frac{b - c}{b - a}, \quad y = m \cdot \frac{c - a}{b - a}.$$

□

Slika 2.8: Рачун мешања

Задатак 2.4.13. *Кафа цене* 270 *динара по килограму меша се са кафом цене* 310 *динара по килограму и добија 220 килограма кафе по цени* 300 *динара. Које су количине прве и друге кафе у смеши?*

Метода једначина из примјера 2.4.11 се лако поопштава на већи број састојака, када се може појавити више различитих решења. Међутим, шеме са слике 2.8 тада слабо помажу.

Примјер 2.4.14. *Да би направили златан пехар масе* 300 *грама од злата финоће* 750 *јединица, колико треба узети злата финоће* 800*,* 700 *и* 600 *јединица?*

Рјешење. Означимо са x, y и z редом количине злата финоће 800, 700 и 600 јединица. Сада систем (2.20) постаје

$$\begin{cases} 800x + 700y + 600z = 750 \cdot 300 \\ x + y = 300, \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 8x + 7y = 2250 - 6z \\ x + y = 300 - z. \end{cases}$$

Отуда решења $x = 150 + z$ и $y = 150 - 2z$ са произвољним реалним „параметром“ $z \in [0, 75]$ грама. На примјер:

$$x = 200 \text{ g}, \quad y = 50 \text{ g}, \quad z = 50 \text{ g},$$

је једно од решења. □

Задатак 2.4.15. *Предузеће има 4 врсте брашна по цени*[19] *од 72, 48, 60 и 66 новчаних јединица по килограму. Колико треба узети од сваке врсте да цена буде 50 н.ј. по килограму?*

Када се тражи бар једно рјешење, или није наведена количина раствора, тада је згодније[20] користити шему 2.9 сличну слици 2.8.

Примјер 2.4.16. *У којој размери треба помешати растворе алкохола јачине* 65%, 50% *и* 30% *да би се добио раствор са* 45% *алкохола?*

x	65%			15	15
y	50%	45%		15	15
z	30%		20	5	25

Slika 2.9: Мешање три компоненте

Рјешење. И овдје су бројеви 15, 15 и 5, односно 20 добијени одузимањем тражене и дате вриједности концентрације (или обрнуто да би резултат био позитиван), што се види на слици 2.9. При томе за z, тј. за алкохол најмање концентрације, одређена су два коефицијента, бројеви 5 и 20, које затим сабирамо и добијамо коефицијент са којим z учествује у процесу мешања. Дакле, имамо продужену пропорцију

$$x : y : z = 15 : 15 : 25,$$

односно након скраћивања $x : y : z = 3 : 3 : 5$. □

С обзиром да количина траженог раствора није одређена, овим је задатак завршен. Уколико би стајао и тај захтев, узели бисмо $x = 3k$, $y = 3k$, $z = 5k$ и наставили са рачуном поделе.

Задатак 2.4.17. *Треба потрошити 4 врсте легуре бакра. Једна садржи* 80% *бакра, друга* 70%, *трећа* 45% *и четврта* 40%. *У којој размери треба узети поједине врсте да би се добила легура са* 50% *бакра?*

Задатак 2.4.18. *Златар меша* 100 g *сребра финоће* 600 $^0/_{00}$ *и* 500 g *сребра финоће* 850 $^0/_{00}$. *Које финоће ће бити мешавина?*

Задаци мешања који садрже „поделу унутар поделе“ су варљиви јер решења зависе од приоритета. Разматраћемо поделу унапред одређене количине новца радницима, према трајању рада и према коефицијенту учинка. У првом случају ћемо давати једнаке исплате сат по сат, у другом случају ћемо обрачунати исплате на крају рада према платним коефицијентима.

[19] в. http://www.slideshare.net/JelenaDobrivojevic/racun-mesanja
[20] в. http://elib.mi.sanu.ac.rs/pages/main.php

Задатак 2.4.19. *Укупни износ од* 24 000 *рубаља треба поделити на два радника ако њихове месечене зараде износе редом* 30 000 *и* 17 000 *рубаља, а они су радили по* 30 *и* 40 *часова.*

i. Исплату извршити према времену на послу.

ii. Исплату извршити према процени радног учинка.

Задатак 2.4.20. *Укупни износ од* 1200 *KM треба поделити на три радника чије месечне зараде износе по* 700, 600 *и* 800 *KM, а они су радили по* 5, 9 *и* 12 *часова.*

i. Исплату извршити према времену на послу.

ii. Исплату извршити према процени радног учинка.

Следе задаци са процентима. Ако у раствору имамо s грама соли и v грама воде, онда имамо $s+v$ грама[21] слане воде. Однос количине соли и раствора је $k_s = s:(s+v)$, а однос воде и раствора је $k_v = v:(s+v)$. Проценат соли у раствору је $p_s = 100k_s$ %, а проценат чисте воде у раствору је $p_v = 100k_v$ %. Приметимо да је збир коефицијената састојака $k_s + k_v = 1$, а збир процената $p_s + p_v = 100$ %.

Задатак 2.4.21. *Роба је коштала* 110 *новчаних јединица, а затим је поскупила за* 20 %. *За колико процената мора да појефтини да би њена цена била* 100 *н.ј.*

Задатак 2.4.22. *Плате Ане и Бранке су биле у односу* 2 : 3*, а од када су обема плате повећане за* 1000 *KM тај однос је* 9 : 11*. Колике су њихове плате?*

Задатак 2.4.23. *У двема шољам се налазе кафа и млеко. Из прве шоље преспемо мало кафе у млеко, а затим вратимо једнаку количину мешавине. Да ли је више млека у првој, или кафе у другој шољи?*

Задатак 2.4.24. *У две веће посуде су литра сирупа и четири литре воде. Из прве посуде у другу сипамо извесну количину сирупа, након чега се сок промеша па се из друге врати у прву једнака количина течности. Колика је та количина ако се у првој посуди нашло* 20% *сирупа? Колики је тада раствор сирупа у другој посуди?*

[21] радимо у истим физичким јединицама

Glava 3

Геометрија

Геометрија је област математике која проучава тачке, линије, облике и простор. *Планиметрија* је геометрија у равни (2-дим), која се бави равним облицима попут линија, троуглова или кругова. *Стереометрија* је геометрија у (3-дим) простору, која проучава геометријска тела, попут коцке, ваљка или лопте.

Није могуће нити је потребно доказивати сваки исказ. Ми у геометрији доказујемо све што можемо и трудимо се да онога што остане недоказано буде што мање и да буде неспорно. Тако се основе геометрије заснивају на првим принципима, које делимо на: дефиниције, постулате, аксиоме или опште прихватљива запажања.

На примјер, *дефиниције* су: тачка из које полазе две полуправе назива се *теме*. *Угао* је део равни између две полуправе које полазе из истог темена. Те полуправе се називају *краци угла*. Када су краци угла различити делови једне праве линије, угао називамо *испружен*. Када се две праве линије секу тако да њихова пресечна тачка формира четири једнака угла, онда кажемо да су те праве узајамно *окомите*, а да су та четири угла *прави* углови. *Оштар угао* је мањи од правог, а *тупи угао* је већи од правог (а мањи од испруженог). *Комплементни* или комплементарни су углови који заједно чине један прави угао. Углови су *суплементни* или суплементарни ако заједно чине испружен угао.

Постулати су на примјер следећа тврђења која узимамо „здраво за готово“. Могуће је повући праву линију кроз било које две тачке. Праву линију можемо продужавати неограничено. Било коју тачку праве линије можемо узети за центар кружнице, а полупречник можемо бирати по вољи велик. Сви прави углови су међусобно једнаки.

Опште прихватљива запажања су на примјер следећа. Ствари једнаке истим стварима једнаке су међусобно. Ако једнаке спојимо (одузмемо од) са једнаким, целине (остаци) ће бити једнаке. Целина је већа од свог дела. Овдје спадају и разне аксиоме, па и Хилбертове[1] аксиоме геометрије, које су разматране[2] на предавањима која овдје следимо.

[1] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар

[2] в. скрипту [1], поглавље: III Геометрија, стр. 56-67.

3.1 Тачке и праве

Пребројавање са битним редоследом елемената су варијације, а са небитним редоследом комбинације. Варијације V_k^n броје низове, комбинације C_k^n скупове. Са $n \in \mathbb{N}$ елемената се може направити

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1) \tag{3.1}$$

низова дужине k, гдје је $1 \le k \le n$ број различитих елемената. Посебно, ако је $k = n$ варијације називамо пермутације и пишемо $n!$, што читамо „n факторијел“. Према томе

$$n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 \tag{3.2}$$

су пермутације. Скуп са n елемената има

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{V_k^n}{n!} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \tag{3.3}$$

потскупова са k елемената. Израз $\binom{n}{k}$ који називамо *биномни коефицијент* читамо „n над k“.

Задатак 3.1.1. *Дат је скуп од $n = 12$ тачака. Колико оне могу да одреде:*
а) правих;
б) равни?
Израчунати ове бројеве за неки други број n.

Задатак 3.1.2. *Колики је најмањи број тачака којима је одређено:*
а) 21 правих;
б) 20 равни?

Колинеарне тачке су оне које леже на истој правој. *Компланарне* су тачке оне које леже у истој равни.

Задатак 3.1.3. *Дат је скуп тачака у којем нема три колинеарне тачке. Колико има тачака ако оне одређују двоструко више правих?*

Задатак 3.1.4. *Дат је скуп тачака у којем нема три колинеарне, нити четири компланарне тачке. Колико има тачака ако оне дефинишу два пута више правих него равни?*

Хилбертове аксиоме инциденције можемо сажети у следеће три:

i-1. За две одвојене тачке A и B равни увек постоји јединствена права линија l у тој равни, таква да јој припадају те обе тачке.

i-2. За сваку праву l равни, постоје две различите тачке A и B у тој равни, које јој припадају.

i-3. Постоје три различите неколинеарне тачке у равни.

Ради вежбања употребе аксиома, покушајте самостално доказати следеће *леме* геометрије (мале теореме), па тек затим погледајте понуђена решења.

Лема 3.1.5. *За произвољне разне праве* l_1, l_2*, ако* $A \in l_1 \cap l_2$*, онда* $l_1 \cap l_2 = \{A\}$*.*

Доказ. Претпоставимо да постоји $B \neq A$ и $B \in l_1 \cap l_2$. Према аксиоми i-1, $l = AB = l_2$. То је у контрадикцији са претпоставком, па према томе не може постојати таква тачка B. □

Лема 3.1.6. *Ако су* A, B, C *три неколинеарне тачке, онда су оне различите.*

Доказ. Претпоставимо прво да је скуп тачака $\{A, B, C\}$ једночлан, тј. $A = B = C$. Према аксиоми i-3, постоји тачка $Q \neq A$. Према аксиоми i-1, постоји линија l која садржи A и Q. Тако $A, B, C \in l$, па су A, B, C колинеарне, што је контрадикција. Према томе, скуп $\{A, B, C\}$ има бар два елемента.

Претпоставимо да је скуп $\{A, B, C\}$ двочлан. Према аксиоми i-1, тада постоји линија која садржи те две разне тачке. Тада су тачке A, B, C датог скупа колинеарне, што је контрадикција. Према томе, скуп $\{A, B, C\}$ има три елемента. □

Лема 3.1.7. *Нека су* A, O, B *неколинеарне тачке. Нека је тачка* $X \neq O$*, са колинеарним* O, B, X*. Тада* A, O, X *нису колинеарне.*

Доказ. Према леми 3.1.6, тачке A, O, B су различите. Нека је права $b = OB$. Тада $A \notin b$, јер су тачке A, O, B неколинеарне. Према аксиоми i-1, $X \in b$. Како $X \neq O$, можемо писати $b = OX$. Како $A \notin b$, према аксиоми i-1 су A, O, X неколинеарне. □

Задатак 3.1.8. *У скупу правих сваке две се секу. Доказати да све те праве припадају једној равни, или све имају тачно једну тачку заједничку.*

Пре решавања следећа два задатака погледаје Хилбертове аксиоме поретка. Са $A - B - C$ означавамо три колинеарне тачке, а тачка B је између A и C.

Задатак 3.1.9. *Ако је* $A - B - C$ *и* $A - D - C$*, онда су* A, B, C, D *тачке једне праве и није* $B - A - D$*. Доказати.*

Задатак 3.1.10. *Ако су* O, A, B, C *тачке једне праве и ако је* $A - O - B$ *и* $A - O - C$*, онда није* $B - O - C$*. Доказати.*

Праве су *паралелне* ако се поклапају, или леже у истој равни а немају заједничких тачака. Права је паралелна равни ако у тој равни постоји права са којом је она паралелна. Паралелне праве a и b означавамо $a||b$. Праву x паралелну равни ξ означавамо $x||\xi$.

Задатак 3.1.11. *Дате су праве* a *и* b *у равни* π*. Ако су све тачке неког скупа* S *такве да* $a \subset S \subset \pi$ *са исте стране праве* b*, доказати да су праве* a *и* b *паралелне.*

Задатак 3.1.12. *Дате су права* a *и раван* α *са исте стране дате равни* π*, доказати да је онда* $a||\alpha$*.*

Конвексан је угао ϕ ако није већи од испруженог угла ($0° \leq \phi \leq 180°$). Према томе, угао је неконвексан ако је већи од испруженог ($180° < \phi < 360°$).

Задатак 3.1.13. *Колико конвексних углова мањих од испруженог одређују* $n = 3$ *компланарне праве које се секу у једној тачки.*

Задатак 3.1.14. *Колико неконвексних углова може бити у:*
а) троуглу; б) четвороуглу; в) петоуглу?

Задатак 3.1.15. *Колико дијагонала има конвексан:*
а) петоугао; б) шестоугао; в) n*-тоугао?*

Задатак 3.1.16. *Колико највише четвороуглова одређују* 7 *тачака у равни, међу којима не постоје* 3 *колинеарне.*

Задатак 3.1.17. *У скупу* S *тачака нема* 3 *колинеарне. Колико тачака има скуп* S *ако оне одређују једнак број троуглова и четвороуглова?*

Следе задаци логичко-комбинаторног типа из геометрије који су планирани или су били на такмичењима из математике за средњошколце.

Задатак 3.1.18. *У правоугаонику страница* 4 *и* 3*, распоређено је* 6 *тачака. Доказати да постоје две од тих тачака чије растојање није веће од* $\sqrt{5}$.

Задатак 3.1.19. *У кругу површине* 1 *распоређено је* 2015 *тачака. Доказати да постоје три тачке, темена троугла површине мање од* $0,001$.

Задатак 3.1.20. *Свака страница конвексног четвороугла подељена је на осам једнаких делова. Спајањем одговарајућих дионих тачака на наспрамним страницама добијамо мрежу од* 64 *поља, која је затим обојена као шаховска плоча. Доказати да је збир површина свих црних поља једнак збиру површина свих белих поља.*

Следећи задатак је био на Међународној математичкој олимпијади 2015. а следећи 2011. године.

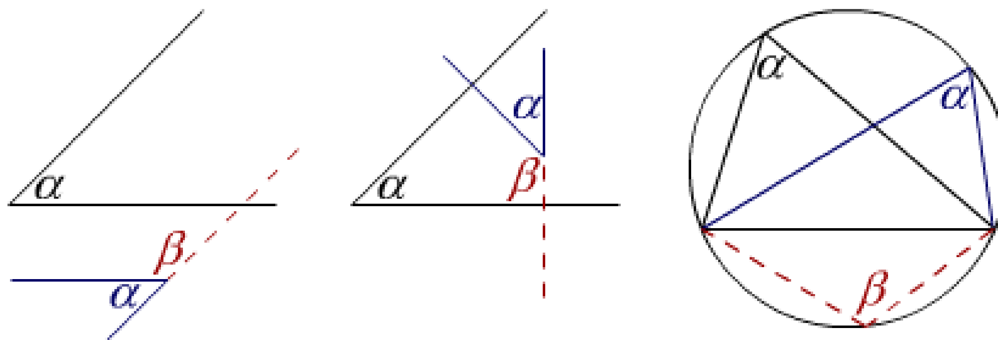
Задатак 3.1.21. *Коначан скуп* $\mathcal{S}$ *тачака у равни зовемо* уравнотеженим *ако за сваке две различите тачке* A *и* B *скупа* $\mathcal{S}$ *постоји тачка* C *у скупу* $\mathcal{S}$ *таква да је* $AC = BC$*. Доказати да за сваки природан број* $n \ge 3$ *постоји уравнотежен скуп који се састоји од* n *тачака.*

Задатак 3.1.22. *Нека је* $\mathcal{S}$ *коначан скуп тачака у равни који садржи бар две тачке. Никоје три тачке скупа* $\mathcal{S}$ *нису колинеарне.* Ветрењачом се назива следећи *поступак. На почетку се бира права* ℓ *која садржи тачно једну тачку* $P \in \mathcal{S}$*. Права* ℓ *ротира у смеру казаљке на сату око* центра P *до момента у коме по први пут садржи неку другу тачку скупа* $\mathcal{S}$*. Од тог момента та тачка,* Q*, постаје нови центар, а права наставља да се ротира око* Q *у смеру казаљке на сату по истом поступку који се никада не прекида.*

Доказати да је могуће изабрати неку тачку $P \in \mathcal{S}$ *и неку праву* ℓ *која садржи* P*, тако да у добијеној ветрењачи свака тачка скупа* $\mathcal{S}$ *постаје центар бесконачно много пута.*

3.2 Углови

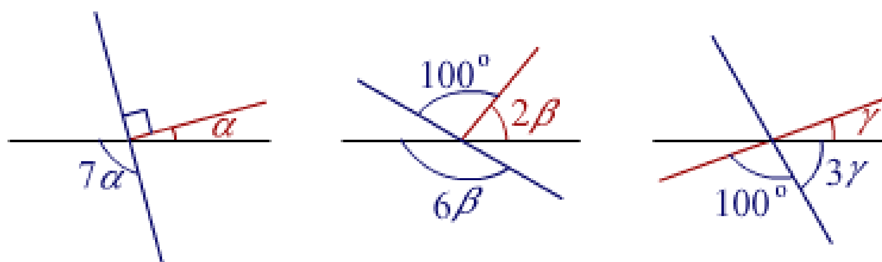
Углови са паралелним крацима су једнаки или су суплементни. Оглови са окомитим крацима су једнаки или су суплементни. Периферни углови над истом тетивом су једнаки или су суплементни.



Slika 3.1: Једнаки и суплементни углови.

Углови α и β су суплементни акко $\alpha + \beta = 180°$, тј. ако и само ако је њихов збир једнак испруженом углу.

Задатак 3.2.1. *Наћи углове α, β и γ приказане на слици 3.2.*



Slika 3.2: Израчунати углове α, β и γ.

Задатак 3.2.2. *i. Наћи углове $a°$ и $b°$ на слици 3.3 лево.*

ii. Наћи непознати угао $x°$ на средњој слици 3.3.

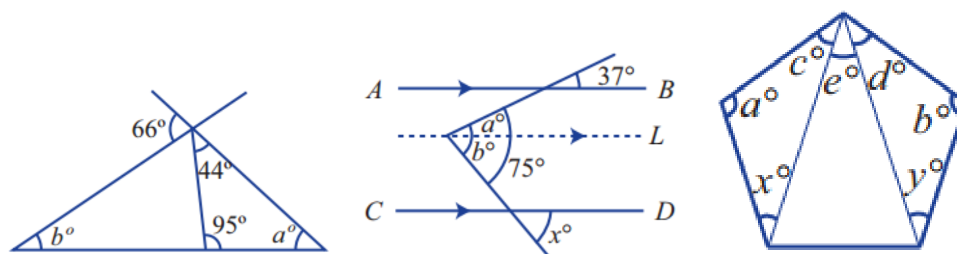
iii. На истој слици десно је правилан конвексан петоугао (пентагон). Наћи углове $a°, b°, c°, d°, e°$. Показати да је $c° = d° = e°$, односно да је горњи унутрашњи угао петоугла подељен на три једнака дела.

На интернету[3] се могу наћи следећа два задатка.

Задатак 3.2.3. *Наћи угао који је једнак свом двоструком суплементу*[4].

[3] facebook: `https://www.facebook.com/WhiteCraneEducation/`

[4] Суплемент, или суплементаран је угао који са датим чини испружен угао, тј. збир им је 180°.



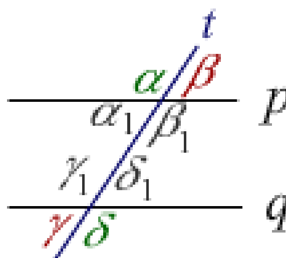
Slika 3.3: Наћи непознате углове.

Задатак 3.2.4. *Петоструки комплемент*[5] *неког угла је за* 24° *мањи од свог двострукког суплемента. Који је то угао?*

Задатак 3.2.5. *Најмањи угао троугла је две трећине средњег, а средњи је три седмине највећег. Колики су углови троугла?*

Трансферзала је било која права која сече паралелне праве. На слици 3.4 то је права t која пресеца праве $p||q$. Она прави једнаке и суплементне углове. Унакрсни углови су једнаки, а овдје то значи $\alpha = \delta$ и $\beta = \gamma$. Опружени (испружени) углови су суплементни, овдје $\beta + \delta = 180°$ и $\alpha + \gamma = 180°$.

Количник наспрамне катете и хипотенузе је синус угла. Количник налегле катете и хипотенузе је косинус угла.



Slika 3.4: Трансферзала a сече паралелне праве.

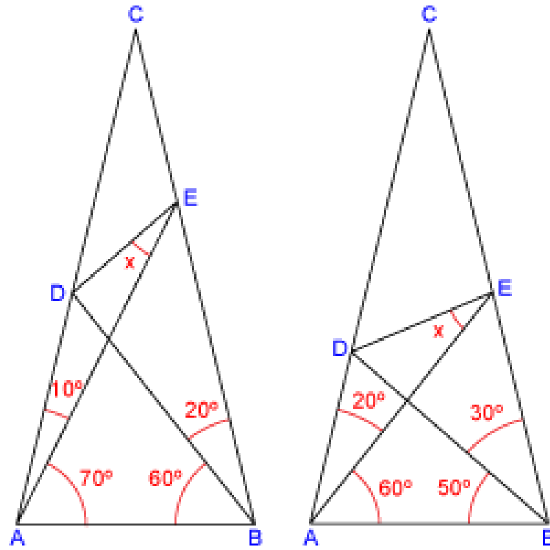
Сагласни углови су: α и γ_1, или β и δ_1, или α_1 и γ, односно β_1 и δ.
Супротни углови су: α и γ, β и δ, α_1 и γ_1, β_1 и δ_1.
Унакрсни углови су: α и δ, β и γ, α_1 и δ_1, β_1 и γ_1.
Суседни углови су: α и α_1, β и α, α_1 и β_1, β_1 и β.

Задатак 3.2.6. *Наћи угао на трансферзали ако је:*
i. супротан свом шестоструком комплементу;
ii. комплементан свом шестоструком суседном.

Следећа два задатка кружe интернетом[6] као тешки геометријски проблеми.

[5]Комплемент, или комплементаран је угао који са датим чини прав угао, збир им је 90°.
[6]World's Geometry Problems:`http://thinkzone.wlonk.com/MathFun/Triangle.htm`

Задатак 3.2.7. *i. Наћи непознати угао* x *на на слици 3.5 лево.*
ii. Наћи непознати угао x *на на слици 3.5 десно.*



Slika 3.5: Наћи непознате углове x.

Задатак 3.2.8. *Доказати да збир унутрашњих углова конвексног* n*-тоугла, за природни број* $n \ge 3$*, износи* $(n-2)\cdot 180°$.

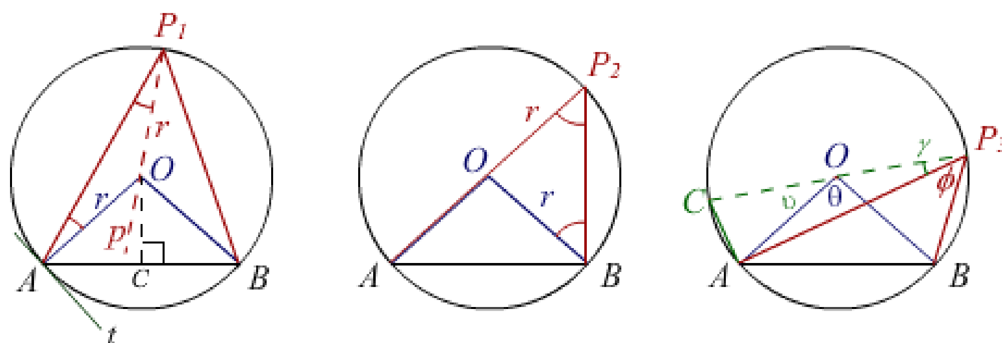
Примјер 3.2.9. *Доказати следећа тврђења.*
i. Периферни угао кружнице је једнак половини централног над истом тетивом.
ii. Угао између тангенте и тетиве једнак је периферном над истом тетивом, који је са друге стране тетиве.
iii. Периферни угао над пречником је прав.
iv. Периферни углови са супротних страна тетиве су суплементни.

Доказ. На три слике 3.6 види се кружница полупречника r са центром у тачки O и са тетивом AB. Само на првој слици (лево) види се тангента t у тачки A.

i. Лево, централни угао AOB је унутар периферног угла AP_1B са теменом у тачки P_1 кружнице. Троугао AP_1O једнакокраки, па је $\angle OAP_1 = \angle AP_1O$ и према томе, вањски угао AOp једнак је двоструком делу периферног $\angle AP_1O$. Слично са друге стране, $\angle pOB = 2\angle OP_1B$. Сабирањем та два добијамо $\angle AOB = 2\angle AP_1B$, дакле да је периферни пола централног.

У средини, троугао P_2OB је једнакокрак, са вањским $\angle AOB = 2\angle AP_2B$.

Десно, на основу претходног, централни угао $\nu = \angle COA$ је двоструко већи од периферног $\gamma = \angle CP_3O$, а такође централни $\nu + \theta = \angle COB$ двоструко је већи од периферног $\gamma + \phi = \angle CP_3B$. Одузимањем налазимо $\theta = 2\phi$.



Slika 3.6: Централни и периферни углови.

ii. Лево, из центра O повучена је нормала $OC \perp AB$. Углови AOC и tAB имају узајамно окомите краке и према томе, једнаки су. То је половина централног угла, односно периферни угао над тетивом AB.

iii. Када је тетива пречник, тада је централни угао испружен, па је па је периферни прав.

iv. Лево, нека је тачка Q_1 пресек праве p и кружнице, али са супротне стране тетиве AB од тачке P_1. Троугао P_1BQ_1 је правоугли, са правим углом у периферној тачки B, па су му углови у теменима P_1 и Q_1 комплементни (збир им је прав угао). Слично је са троуглом P_1AQ_1. Зато су збирни углови у теменима P_1 и Q_1 суплементни (допуњавају се до испруженог). □

Задатак 3.2.10. *Дат је круг са центром у O са тангентном DE кружним луковима у пропорцији $BC : CD : AD : AB = 7 : 8 : 12 : 9$. Наћи све углове означене бројевима $1, 2, \dots, 12$, као што се види на слици 3.7.*

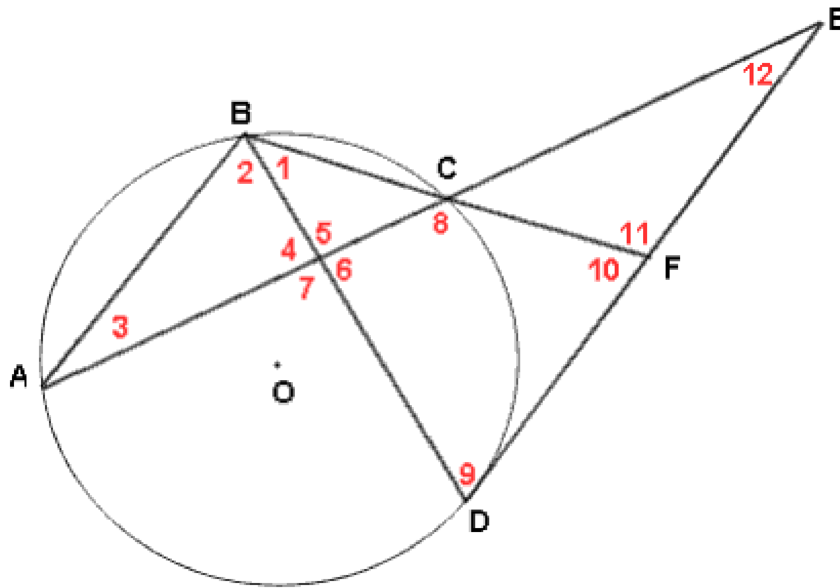
Задатак 3.2.11. *Показати да од две тетиве истог круга мањи од оштрих периферних углова припада мањој.*

Симетрала угла је права линија која полови угао. Другим речима, *симетрала* угла је геометријско место тачака једнако удаљених од кракова угла. Под симетралом угла троугла сматра се и (дуж) онај део симетрале (праве) који се налази унутрар троугла.

Задатак 3.2.12. *Доказати да мањи угао троугла има дужу симетралу.*

Следећи задатак је Штајнер-Лехмусова теорема. Лехмус[7] је 1840. године овакво питање послао писмом Штурму[8] који га је поставио јавно као задатак. Један од првих који се јавио са рјешењем био је Штајнер[9].

[7]C. L. Lehmus (1780-1863), њемачки математичар.
[8]C. Sturm (1803-1855), француски математичар.
[9]Jakob Steiner (1796-1863), швајцарски математичар, геометар.



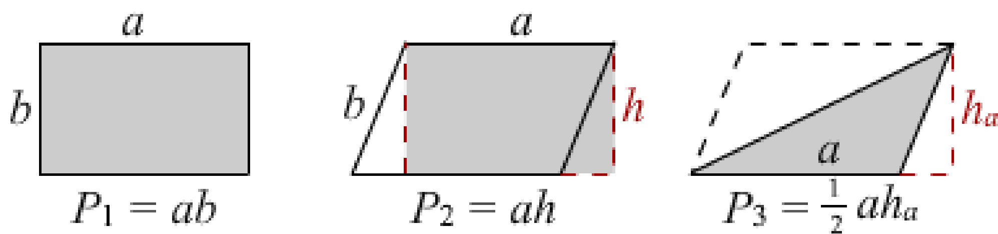
Slika 3.7: Круг и дванаест углова.

Задатак 3.2.13. *Ако су две симетрале угла једнаке, троугао је једнакокрак.*

Задатак 3.2.14. *Ако тетивни четвороугао има окомите дијагонале које се секу у тачки M, права кроз M окомита на било коју страницу полови супротну страницу.*

Ово тврђење се назива Брахмагуптина[10] теорема, аутора који је познат и по открићу фомуле за површину тетивног четвороугла из које се може извести Хеонов[11] образац.

Површина правоугаоника страница дужина a и b је $P_1 = ab$, као што се види на првој слици 3.8. Површина паралелограма висине h на страници a, на истој слици у средини, је $P_2 = ah$. На тој слици десно је површина троугла $P_3 = \frac{1}{2}ah_a$.

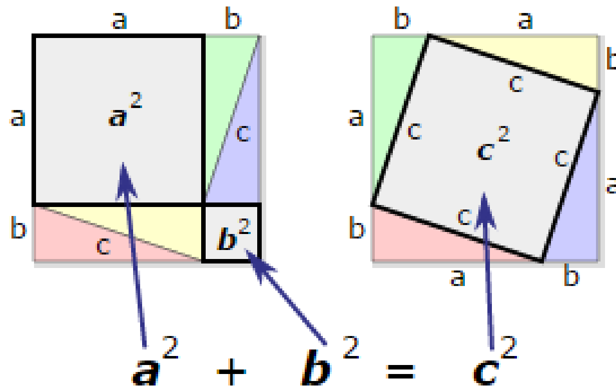


Slika 3.8: Површине.

[10] Brahmagupta (око 598-665), индијски математичар

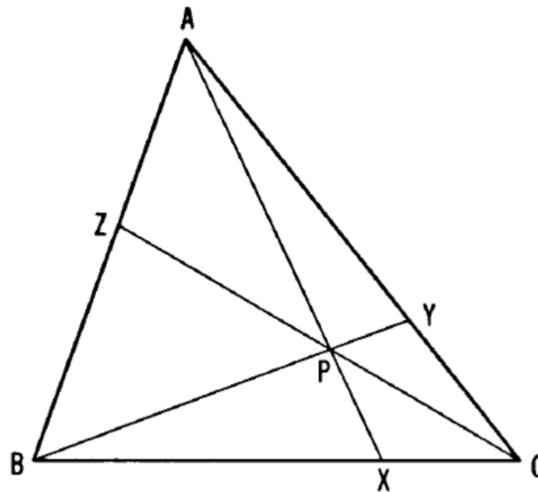
[11] Херон из Александрије (око 10-70), грчки математичар.

Постоји много занимљивих задатака у геометрији који се могу решавати помоћу површина. Међу познатије спада визуелни доказ Питагорине теореме, као онај на слици 3.9. За произвољан правоугли троугао најдуже странице (хипотенузе) дужине c и осталих страница (катета) дужина a и b важи једнакост $c^2 = a^2 + b^2$.



Slika 3.9: Питагорина теорема.

Други примјер је мало мање позната Чевијева[12] теорема из 1678. године, коју ћемо сада доказати. Део праве унутар троугла од било којег његовог темена до произвољне тачке на супротној страници, називамо *чевијан*. Тако, за троугао ABC и произвољне три тачке $X \in BC$, $Y \in CA$ и $Z \in AB$, три дужи AX, BY и CZ су чевијани. Када кажемо да су три или више линија *конкурентне*, мислимо да оне пролазе истом тачком, рецимо P, као на слици 3.10.



Slika 3.10: Конкурентни чевијани.

[12]Giovanni Ceva (1647-1734), италијански математичар.

Теорема 3.2.15. *Три чевијана AX, BY, CZ из различитих врхова троугла ABC су конкурентни, ако и само ако је*

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Доказ. Прво, нека су дати чевијани конкурентни. Површине троуглова једнаких висина су пропорционалне, па према слици 3.10 имамо редом:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{P_3(ABX)}{P_3(AXC)} = \frac{P_3(PBX)}{P_3(PXC)} = \frac{P_3(ABX) - P_3(PBX)}{P_3(AXC) - P_3(PXC)} = \frac{P_3(ABP)}{P_3(CAP)}.$$

Слично:

$$\frac{CY}{YA} = \frac{P_3(BCP)}{P_3(ABP)}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{P_3(CAP)}{P_3(BCP)}.$$

Након множења ових, добијамо:

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = \frac{P_3(ABP)}{P_3(CAP)}\frac{P_3(BCP)}{P_3(ABP)}\frac{P_3(CAP)}{P_3(BCP)} = 1.$$

Тиме је доказана тражена једнакост.

Друго, нека важи дата једнакост. Претпоставимо да се два чевијана из A и B секу у тачки P, а да кроз ту тачку пролази трећи CZ'. Тада је према претходном доказу и према новој претпоставци, редом:

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ'}{Z'B} = 1, \quad \frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Отуда

$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$$

што значи коинциденцију (поклапање) тачака Z' и Z, чиме смо доказали да су AX, BY, CZ конкурентни. □

Покушајте помоћу површина троугла доказати и следећу теорему, а тек затим прочитајте рјешење.

Теорема 3.2.16. *Симетрала унутрашњег угла троугла дијели наспрамну страницу у односу других двеју страница.*

Доказ. Нека је $s = CC_s$ симетрала угла C троугла ABC, а $h = CC_h$ висина на страницу AB, као на слици 3.11 лево. Конструишимо нормале $C_sM \perp BC$ и $C_sN \perp AC$ на странице a и b редом. Имамо за површину троугла ACC_s, редом:

$$\frac{AC_s \cdot CC_h}{2} = \frac{AC \cdot C_sN}{2},$$

$$AC_s : AC = C_sN : CC_h.$$

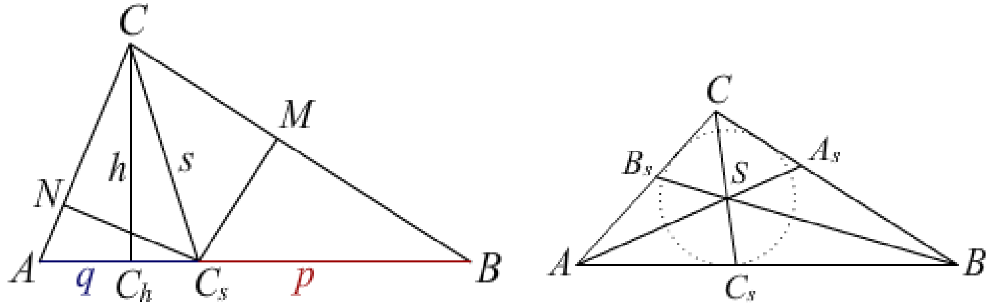
Слично, посматрајући троугао BCC_s добијамо $BC_s : BC = C_sM : CC_h$. Како је $D \in s$, то је $C_sN = C_sM$, па из претходних пропорција следи:

$$AC_s : AC = B_cS : BC,$$

$$q : b = p : a,$$

$$q : p = b : a,$$

што је и требало доказати. □



Slika 3.11: Симетрале углова троугла ABC.

Примјер 3.2.17. *Троугао је дат дужинама својих страница a, b, c. Наћи односе у којима центар уписане кружнице S дијели симетрале углова тог троугла.*

Рјешење. На слици 3.11 десно, имамо троугао ABC са симетралама углова AA_s, BB_s и CC_s које се секу у тачки S. Из претходне теореме 3.2.16 следи:

$$B_sC : B_sA = BC : BA = a : c,$$

а због $B_sC + B_sA = b$ добијамо:

$$B_sC = \frac{ab}{a+c}, \quad B_sA = \frac{bc}{a+c}.$$

Примењујући претходну теорему на троугао BCB_s добијамо

$$SB_s : SB = CB_s : CB,$$

што са претходним даје тражени однос за симетралу BB_s. Уопште:

$$\frac{A_sS}{AS} = \frac{a}{b+c}, \quad \frac{B_sS}{BS} = \frac{b}{a+c}, \quad \frac{C_sS}{CS} = \frac{c}{a+b}. \tag{3.4}$$

□

Задатак 3.2.18. *Нека се симетрале* AA_s, BB_s *и* CC_s *унутрашњих углова троугла* ABC *секу у тачки* S. *Доказати да је:*

$$i)\ \frac{SA_s}{AA_s} + \frac{SB_s}{BB_s} + \frac{SC_s}{CC_s} = 1, \quad ii)\ \frac{SA}{AA_s} + \frac{SB}{BB_s} + \frac{SC}{CC_s} = 2,$$

$$iii)\ \frac{SA}{SA_s} + \frac{SB}{SB_s} + \frac{SC}{SC_s} > 3, \quad iv)\ \frac{1}{4} < \frac{SA}{AA_s}\frac{SB}{BB_s}\frac{SC}{CC_s} \le \frac{8}{27},$$

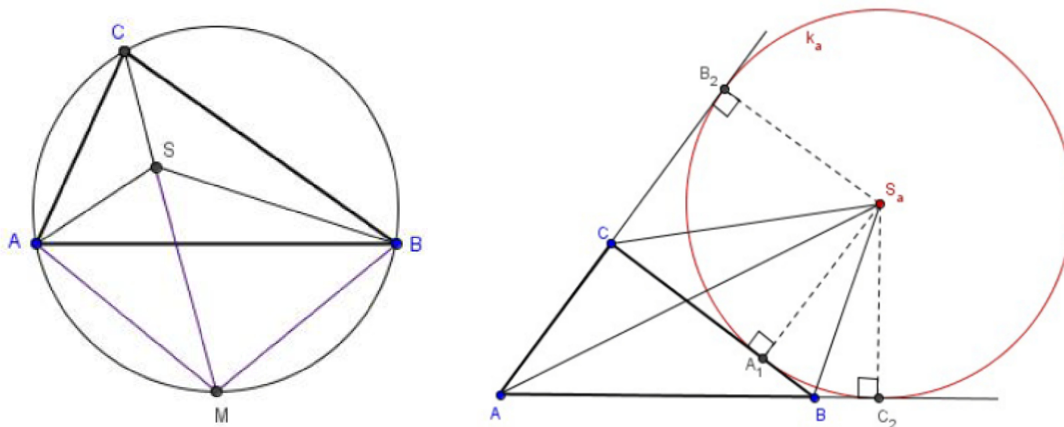
$$v)\ SB_s \cdot SC_s < \frac{1}{4} \cdot BB_s \cdot CC_s < SB \cdot SC.$$

Кориштене су ознаке са слике 3.11 десно.

Симетрале унутрашњих углова трогла ABC секу се у једној тачки S. Та тачка је једнако удаљена од страница троугла, па је она центар кружнице која их додирује, уписане кружнице датог троугла. Пресеци симетрала страница секу се у другој, такође једној тачки која је једнако удаљена од сва три темена троугла, па је она центар описане кружнице троугла. Уписану и описану кружницу повезује следећи исказ.

Примјер 3.2.19. *Нека симетрала угла* $\gamma = \angle ACB$ *сече кружницу описану око троугла* ABC *у тачки* M. *Тада је* $MS = MA = MB$, *гдје је* S *центар уписане кружнице. Доказати.*

Доказ. Према слици 3.12 лево. Из $\angle ACM = \angle BCM = \frac{\gamma}{2}$ следи да је M средина лука AB, па је $MA = MB$. Такође је $\angle ASM = \angle SAC + \angle SCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ и $\angle SAM = \angle SAB + \angle BAM = \frac{\alpha}{2} + \angle BCM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Из последње две једнакости је $MA = MS$, а отуда и из прве једнакости следи $MA = MB = MC$, што је и требало доказати. □



Slika 3.12: Описана и приписана кружница троугла ABC.

Спољна приписана кружница k_a троугла ABC додирује његову страницу a и продужетке остале две, на слици 3.12 десно. Центар S_a спољна приписане кружнице

тог троугла налази се на симетралама вањских углова у теменима B, C и на симетрали унутрашњег угла у темену A.

Задатак 3.2.20. *i. Показати да додирне тачке уписаног круга деле странице a, b, c троугла на одсјечке дужина:*

$$\frac{-a+b+c}{2}, \quad \frac{a-b+c}{2}, \quad \frac{a+b-c}{2}.$$

ii. Показати да додирна тачка вани приписаног круга дијели страницу а на одсјечке дужина:

$$\frac{a-b+c}{2}, \quad \frac{a+b-c}{2}.$$

Тангентни четвороугао је онај чије странице тангирају кружницу. Странице *тетивног* четвороугла су тетиве кружнице.

Задатак 3.2.21. *Доказати следећа тврђења.*

i. Збирови наспрамних страница тангентног четвороугла су једнаки.

ii. Збирови наспрамних углова тетивног четвороугла су једнаки.

Задатак 3.2.22. *Нека су AA_1 и BB_1 висине ΔABC. Доказати следећа тврђења.*

i. Тачке A, B, A_1, B_1 припадају једној кружници.

ii. Троуглови ΔABC и ΔA_1B_1C имају једнаке одговарајуће углове.

Задатак 3.2.23. *У троуглу ABC је $\angle C = 60°$. Ако су AA_1 и BB_1 висине и C_s средина странице AB, доказати да је тада троугао $C_sA_1B_1$ једнакостраничан.*

Задатак 3.2.24. *Нека су A и B две фиксне и $C \neq A, B$ промењљива тачка дате кружнице. Ако су AA_1 и BB_1 висине троугла ABC, доказати да дужина A_1B_1 не зависи од положаја тачке C.*

Задатак 3.2.25. *Нека су M и N редом тачке на страницама BC и AC троугла ABC чији је центар описане кружнице O. Доказати да је четвороугао $ABMN$ тетивни ако и само ако је $OC \perp MN$.*

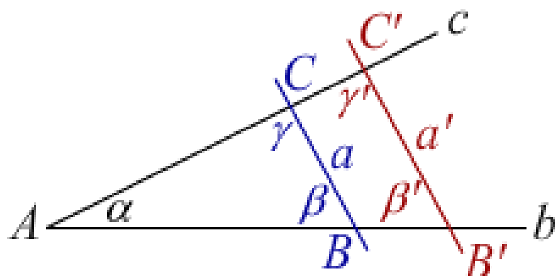
У наслову који следи још дубље ћемо се бавити геометријом једнаких углова и последицама.

3.3 Сличност

Када се конвексни угао α пресече паралелним правама a и a', као на слици 3.13, тада имамо једнаке углове $\beta = \beta'$ и $\gamma = \gamma'$ и обратно, када су ти углови на крацима једнаки, онда су пресечне праве паралелне. Отуда и позната Талесова теорема о сличности,

$$a \| a' \iff AB : AB' = AC : AC' = BC : B'C', \tag{3.5}$$

која је централно место следеће групе задатака.



Slika 3.13: Талесова теорема о сличности.

Када троуглови ABC $AB'C'$ имају једнаке одговарајуће углове, тада кажемо да су они слични и пишемо $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$. У VI књизи Еуклидових Елемената, став 2. можемо наћи следеће тврђење, мало другачије исказано.

Задатак 3.3.1. *На продужетку страница b и c троугла ABC конструисано је $B'C' \| BC$. Доказати помоћу површина да је $BB' : AB = C'C : CA$.*

Обрат овог тврђења је следећи задатак.

Задатак 3.3.2. *Ако је $BB' : AB = C'C : CA$, са ознакама као на слици 3.13, онда је $a \| a'$. Доказати помоћу површина.*

Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних страна. Из ове дефиниције произилази да су наспрамни (унутрашњи) углови паралелограма једнаки, да су му наспрамне странице једнаке дужине, да му се дијагонале полове.

Доказати следећа два исказа користећи дефиниције паралелограма. Треће је доказ Питагорине теореме помоћу сличности троуглова.

Задатак 3.3.3. *Када су одговарајући углови два троугла једнаки, тада су им и одговарајуће странице пропорционалне.*

Средња линија троугла је дуж која спаја средине две његове странице. Наспрамна страница троугла, паралелна средњој линији понекад се назива основица троугла.

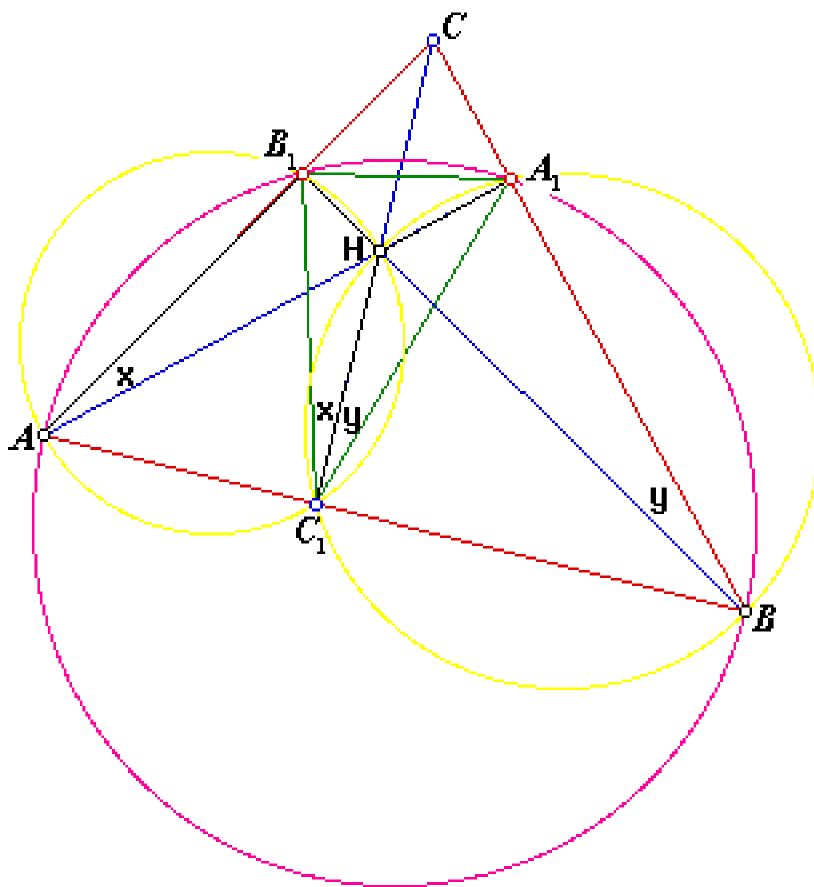
Задатак 3.3.4. *Средња линија троугла паралелна је основици и по дужини једнака њеној половини.*

Задатак 3.3.5. *Применом сличности за правоугли троугао* ABC *висине* $h_c = CD$ *из правог угла, која дијели хипотенузу* $c = AB$ *на одсјечке* $p = AD$ *и* $q = DC$*, доказати:*

$$a^2 = q \cdot c, \quad b^2 = p \cdot c, \quad h_c^2 = p \cdot q,$$

гдје су катете дужина $a = BC$ *и* $b = AB$*. Затим доказати* $a^2 + b^2 = c^2$*.*

Подножја висина троугла ABC означимо са A_1, B_1, C_1, као на слици 3.14. Висине троугла се секу у тачки H коју називамо ортоцентар датог троугла, а троугао $A_1B_1C_1$ је *ортички*[13] или педални. У задатку 3.2.22 је доказано да тачке A, B, A_1, B_1 припадају једној кружници и да је $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$, тј. да ортички троугао на главном одсеца сличне троуглове.



Slika 3.14: Висине AA_1, BB_1, CC_1 троугла.

Задатак 3.3.6. *На слици 3.14 показати следеће.*

i. Угао $x = \angle A_1AC$ *комплемент угла* $\gamma = \angle ACB$ *и исто је угао* $y = \angle CBB_1$*. То су и периферни углови над истом тетивом* A_1B_1*.*

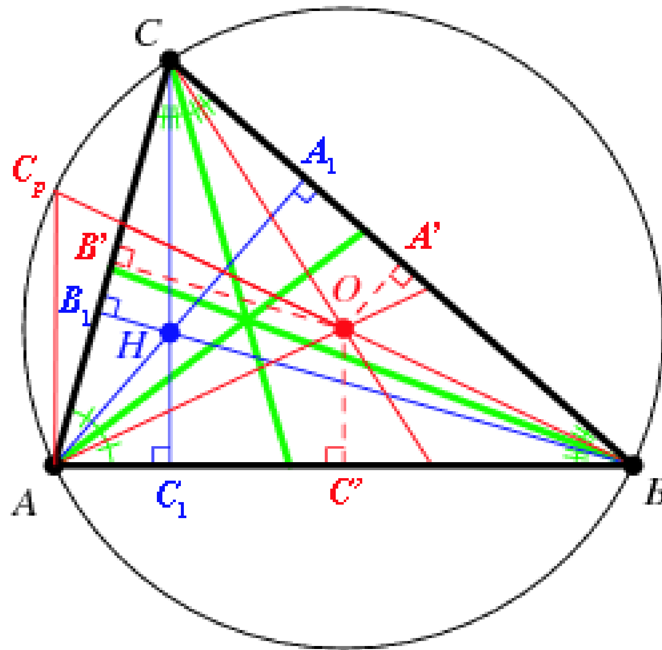
[13] orthic triangle - енг. троугао чија су темена подножја висина датог троугла

ii. Четвороугоа AC_1HB_1 је тетиван јер су му наспрамни углови у B_1 и C_1 суплементни, тачније прави. Зато $\angle HAB_1 = \angle HC_1B_1$.

iii. Висина (CC_1) датог троугла је симетрала угла ортичког троугла.

iv. $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$.

На слици 3.14 додајмо тачку O, центар описаног круга троугла ABC, која се види на слици 3.15. Тачка O се налази у пресеку симетрала страница троугла, а ове пролазе средишњим тачкама A', B', C' окомито на странице наспрам темена A, B, C датог троугла. Углови датог троугла су $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.



Slika 3.15: Висине AA_1, BB_1, CC_1 троугла.

Задатак 3.3.7. *Показати следеће.*

i. $\angle A'OC = \alpha$, $\angle B'OA = \beta$ *и* $\angle C'OB = \gamma$. *Рецимо,* $\Delta C'OB \sim \Delta AC_pB$, *а углови у* C_p *и* C *су периферни над истом тетивом.*

ii. $\angle HC_1B_1 = \angle C_1AO$. *Наиме, оба* $\angle HC_1B_1$ *и* $\angle C_1AO$ *су комплементи* γ.

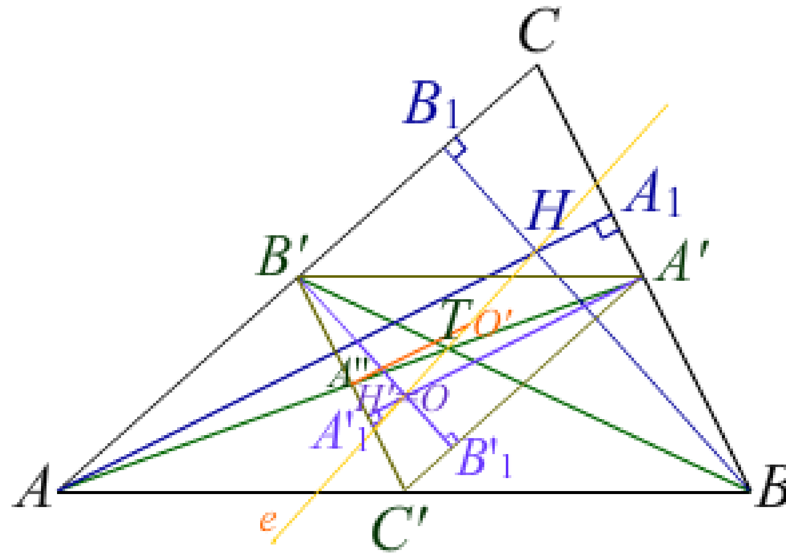
iii. $HC_1 \perp C_1A \Rightarrow B_1C_1 \perp OA$. *Аналогно* $C_1A_1 \perp OB$ *и* $A_1B_1 \perp OC$.

iv. $\Delta CA_1B_1 \sim \Delta C_1AB_1 \sim \Delta C_1A_1B \sim \Delta ABC$.

Дуж која спаја врх троугла са средином супротне странице назива се *тежишница* или медијана, а троугао чија су темена средине страница датог троугла назива се *медијални троугао*. *Тежиште* је тачка у којој се секу тежишнице (медијане) троугла, а *ортоцентар* је тачка у којој се секу висине троугла.

Задатак 3.3.8. *Доказати да тежиште дијели тежишницу у односу* $2:1$ *почев од врха троугла.*

На слици 3.16, $\Delta A'B'C'$ је медијални троугао од ΔABC. Додате су две медијане AA' и BB' које се секу у тежишту T, две висине AA_1, BB_1 троугла ΔABC које се секу у ортоцентру H и две висине $A'A_1', B'B_1'$ троугла $\Delta A'B'C'$ које се секу у H'.



Slika 3.16: Медијални троугао $A'B'C'$ троугла ABC.

Задатак 3.3.9. *Користећи слику 3.16 проверити следећа тврђења.*

i. Странице медијалног троугла су паралелне одговарајућим страницама датог, па су ова два троугла слични.

ii. Странице медијалног троугла су половине дужина страница датог, па медијални разлаже дати троугао на четири једнака дела.

iii. Четвороугао $AC'A'B'$ *је паралелограм, па* AA' *полови* $B'C'$ *у тачки* A''.

iv. Медијане медијалног трогугла леже на медијанама главног, па им је тажиште заједничко.

v. Висине (нпр. $A'A_1'$*) медијалног троугла леже на симетралама одговарајуће странице (*BC*) главног троугла, па је ортоцентар* H' *медијалног троугла уједно и центар* O *описаног круга главног троугла.*

Након овог задатка смо на корак од открића *Ојлерове линије*, e на слици 3.16, на којој леже три значајне тачке троугла: ортоцентар H, центар S уписаног круга и центар O описаног круга. Пре тога се потсетимо неколико иначе познатих ставова.

Задатак 3.3.10. *Доказати следећа тврђења.*

i. Центар S *уписаног и центар* O *описаног круга су јединствене тачке троугла.*

ii. Све три висине троугла секу у једној тачки H*, ортоцентру троугла.*

Задатак 3.3.11. *Доказати следећа тврђења.*

i. Све три тежишнице (медијане) се секу у једној тачки, тежишту троугла.

ii. Троугао је тежишницама подељен на шест мањих троуглова једнаких површина.

iii. Тежиште дијели тежишницу у односу $2:1$ *почев од врха троугла.*

Задатак 3.3.12. *Ортоцентар* H*, центар* S *уписаног круга и центар* O *описаног круга су колинеарни. Центар уписаног круга дијели растојање од ортоцентра до центра описаног круга у односу* $2:1$*.*

Задатак 3.3.13. *Доказати да је центар* O' *описаног круга медијалног троугла* $A'B'C'$ *на средини* OH*, дужи чији су крајеви центар описаног круга и ортоцентар главног троугла* ABC*.*

Овим је доказано да центар O' описаног круга медијалног троугла $A'B'C'$ лежи на средини дужи HO која лежи на Ојлеровој линији главног троугла ABC. Како је $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$, полупречник описаног круга медијалног троугла двоструко је мањи од таквог полупречника главног троугла.

Ово су биле само неке од многих значајних тачки троугла, а нису нити једине такве које леже на Ојлеровој правој. Са друге стане, троуглови имају и других занимљивих особина, као што је тврђење: "наспрам дуже стране налази се већи угао и обарно", доказано на страни 64. скрипте [1]. У пакету са тим иде и следеће тврђење, тамо недоказано.

Примјер 3.3.14. *У било којем троуглу, збир две стане је већи од треће.*

То је геометријска интерпретација познате *неједнакости троугла*, $b < c + a$, из које због произвољности страница a, b и c лако добијамо две неједнакости:

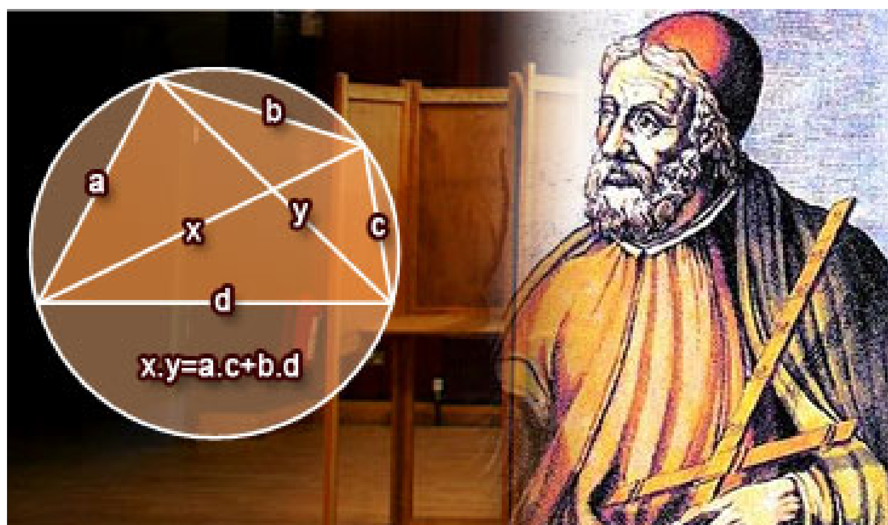
$$|c - a| \le b \le c + a, \tag{3.6}$$

још даље поопштаване и често кориштене у алгебри и анализи.

Теорема 3.3.15 (Птоломејева)**.** *Ако је четвороугао уписан у круг, тада је производ његових дијагонала једнак збиру производа парова супротних страница.*

Доказ. Према слици 3.17, нека је $\angle A = \angle ab$, $\angle B = \angle bc$, $\angle C = \angle cd$ и $\angle D = \angle da$. Бирајмо тачку $K \in AC$ тако да је $\angle ABK = \angle CBD$. Из $\angle ABK + \angle CBK = \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD$ следи $\angle CBK = \angle ABD$.

Из задатка 3.2.21, да су наспрамни углови тетивног четвороугла суплементни, следи једнакост $\angle BAK = \angle BDC$, а затим $\Delta BAK \sim \Delta BDC$, и $\Delta ABD \sim \Delta KBC$. Отуда $AK : AB = CD : BD$ и $CK : BC = DA : BD$, односно $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ и $CK \cdot BD = BC \cdot DA$. Сабирањем добијамо $AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, или издвајањем фактора $(AK + CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Међутим $AK + CK = AC$, па имамо $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, тј. $xy = ac + bd$, што је и требало доказати. □



Slika 3.17: Птоломејева теорема.

Ову Птоломејеву[14] теорему можете лако применити на доказ следеће тзв. Ван Шутенове[15] теореме.

Задатак 3.3.16. *Око једнакостраничног троугла ABC описана је кружница, а M је произвољна тачка лука од A до B. Доказати да важи $MC = MA + MB$.*

Кружница је геометријско место тачака у равни које су једнако удаљене од једне фиксне тачке. Ту фиксну тачку називамо центар круга, а удаљеност полупречник круга. Кружница је периферија круга. Још неке особине кружнице откривамо у задацима који следе.

Задатак 3.3.17. *Ако се две праве линије a, b секу у тачки P и пресецају кружницу полупречника r у тачкама A, A' и B, B' редом, доказати да важи:*
i. $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$;
ii. $PT^2 = PA \cdot PA'$, *ако је* $B = B' = T$;
iii. $PA \cdot PA' = |d^2 - r^2|$, *гдје је d удаљеност тачке P од центра круга.*

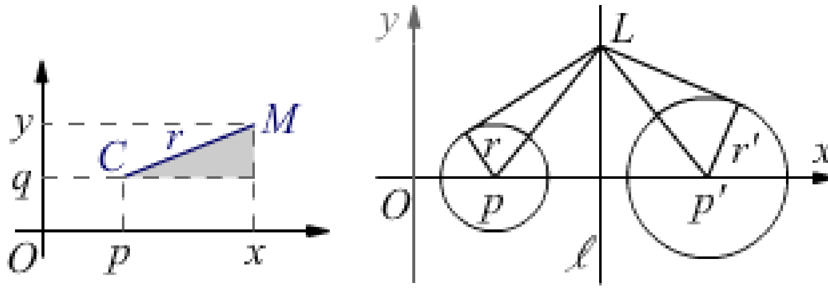
За било који круг полупречника r и било коју тачку P у истој равни удаљену d од центра круга, број $d^2 - r^2$ називамо *потенцијом тачке P* у односу на дати круг. Тај број је позитиван, нула или негативан редом када је тачка P изван круга, на кружници или унуар круга. Реч потенција је први употребио Јакоб Штајнер, кога смо помињали у задатку 3.2.13, а употреба води директно у координатну геометрију. Према некима, идеју за откриће аналитичке геометрију дао је Фермат[16] Декарту[17] у свом писму.

[14] Claudius Ptolemy (око 100-170), грчки математичар из Александрије.
[15] Franz Van Schooten (1615-1666), холандски математичар
[16] Pierre de Fermat (1601-1665), француски правник и математичар.
[17] René Descartes (1596-1650), француски филозоф и математичар.

Примјер 3.3.18. *Геометријско место тачака једнаких потенција у односу на два неконцентрична круга је права линија окомита на линију која спаја центре та два круга.*

Рјешење. На слици 3.18 лево, дате су тачке $C(p,q), M(x,y)$ чије се кооридинате пресецају у тачки (x,p) формирајући правоугли троугао. Катете паралелне редом апсциси (x-оси) и ординати (y-оси) имају дужине $|x-p|$ и $|y-q|$, па је дужина хипотенузе

$$r = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}.$$



Slika 3.18: Координатна геометрија.

Поставимо ли центар круга у тачки C, геометријско место тачака једнако удаљених од центра за $r = \text{const.}$ је кружница са аналитичким записом

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2. \tag{3.7}$$

Потенција тачке $M(x,y)$ у односу на кружницу са центром $C(p,q)$ и полупречником r је

$$d^2 - r^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2. \tag{3.8}$$

Посебно, ако је потенција нула, тачка M је на кружници са једначином (3.7). Након квадрирања и срећивања потенције (3.8), добијамо

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + c = 0, \quad c = p^2 + q^2 - r^2. \tag{3.9}$$

За две кружнице са центрима (p,q) и (p',q') које у тачки (x,y) имају једнаке потенције важи једнакост ($c' = p'^2 + q'^2 - r'^2$)

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + c = x^2 + y^2 - 2p'x - 2q'y + c',$$

која након поједностављивања постаје

$$(p'-p)x + (q'-q)y = \frac{1}{2}(c'-c). \tag{3.10}$$

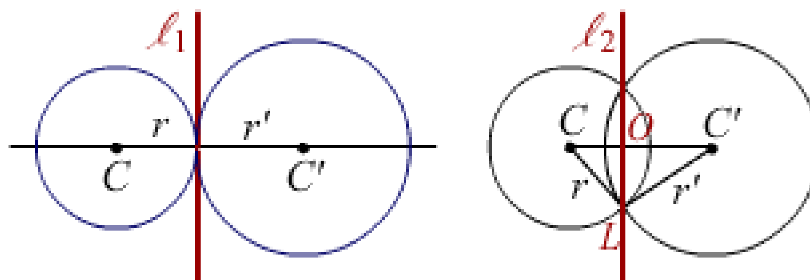
Ово је једначина праве линије. Бирајући Декартов систем координата Oxy тако да апсциса пролази центрима кругова, биће $q = q' = 0$, па једначине кругова (3.9)

добијају једноставније облике и изгледају као на слици 3.18 десно. Права (3.10) постаје

$$x = \frac{c' - c}{2(p' - p)}, \quad p' - p \neq 0. \tag{3.11}$$

То је права ℓ окомита на апсису (x-оса), тј. паралелна ординати (y-оса). У посебном случају, када је $c' - c = 0$, та права је ордината. □

Геометријско место тачака једнаких потенција у односу на два не-концентрична круга назива се потенцијална или *радикална оса*.



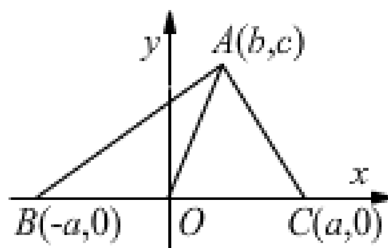
Slika 3.19: Радикалне осе ℓ_1 и ℓ_2.

Задатак 3.3.19. *Показати да радикалне осе ℓ_1 и ℓ_2 одговарају онима на слици 3.19,*

Задатак 3.3.20. *Ако центри три круга формирају троугао, онда постоји само једна тачка чије су потенције у односу на та три круга једнаке. Доказати.*

Заједничка тачка три радикалне осе назива се *радикални центар* три круга. Доказ изостављамо јер је тривијалан. Следећи исказ је Аполонијева[18] теорема.

Примјер 3.3.21. *Нека је тачка O на средини странице $BC \subset x$-осе троугла ABC. Доказати да је $AB^2 + AC^2 = 2(AO^2 + BO^2)$.*



Slika 3.20: Аполонијева теорема

[18] Apolonije iz Pergama (262-190 p.n.e.), александријски научник, Велики геометар.

Доказ. Са слике 3.20 израчунавамо:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= [(b+a)^2 + c^2] + [(b-a)^2 + c^2] \\ &= 2(b^2 + c^2) + 2a^2 \\ &= 2 \cdot AO^2 + 2 \cdot BO^2. \end{aligned}$$

□

На сличан начин се може доказати и поопштење овог става, које се понегдје назива Стјуартова[19] теорема.

Задатак 3.3.22. *Нека је* $\in BC$ *троугла* ABC*. Ако је* $BO : OC = m : n$*, доказати*

$$n \cdot AB^2 + m \cdot AC^2 = n \cdot BO^2 + m \cdot CO^2 + (m+n) \cdot AO^2.$$

У следећем задатку помоћу Стјуартове доказаћемо Лајбницову[20] теорему.

Задатак 3.3.23. *Ако је* T *тежиште троугла* ABC *и* P *произвољна тачка, доказати да је:*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3 \cdot PT^2.$$

У својим Елементима је Еуклид имплицитно употребио једно тврђење које се не може извести из његових постулата а чију важну улогу је открио Мориц Паш[21] 1882. године. То је Пашова аксиома:

У равни, ако права линија пресеца једну страницу троугла онда она пресеца још једну страницу троугла и продужетак друге.

У случају да је трећа страница паралелна онда се прихвата и „пресек у бесконачности“. Ова аксиома помаже у доказу следећег тврђења које се назива Менелајева[22] теорема.

Задатак 3.3.24. *Дат је троугао* ABC *и права линија која пресеца праве* BC, AC *и* AB *редом у тачкама* P, Q *и* R*. Доказати да је тада:*

$$\frac{AR}{RB}\frac{QC}{QA}\frac{PB}{PC} = -1,$$

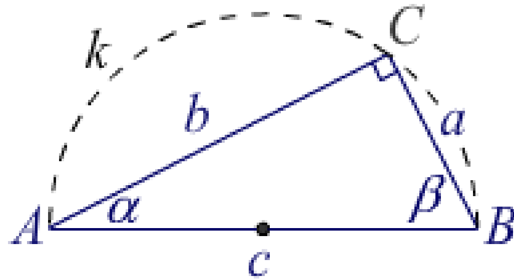
гдје се дужина узима негативно ако је на продужетку странице троугла.

У наставку ћемо видети једну важну последицу сличности троуглова која је веома ефикасна и популарна у математици и њеним применама у другим наукама. То је тригонометрија правоуглог троугла.

[19] Matthew Stewart (1718-1785), шкотски математичар.
[20] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), математичар и филозоф, Лужички Србин из Немачке.
[21] Moritz Pasch (1843-1930), немачки математичар.
[22] Menelaus of Alexandria (око 70-140), грчки математичар и астроном.

3.4 Тригонометрија

Тригонометрија је грана математике која се бави мерењем страница и углова троугла и одговарајућим функцијама углова уопште. Међутим, овдје се ограничавамо на трогонометрију правоуглог троугла.



Slika 3.21: Правоугли троугао

Периферни угао над пречником је прав. На слици 3.21, над пречником AB кружнице k периферни угао $\angle ACB = 90°$. Знамо да та тај троугао важи Питагорина теорема

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{3.12}$$

гдје је $c = 2r$ пречник кружнице k и *хипотенуза* троугла ABC, са узајамно окомитим *катетама* $BC = a$ и $CA = b$. Оштри углови $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ тог троугла су *комплементни*, тј. $\alpha + \beta = 90°$.

Мењајући избор тачке $C \in k$ могуће је добити правоугли троугао ΔABC сличан било којем унапред датом правоуглом троуглу. То је основна идеја тригонометрије, да се проучавање овог троугла примени на било који правоугли троугао. Све даље је ствар пропорција и сличности.

Синус угла је количник њему наспрамне катете и хипотенузе. *Косинус* угла је количник налегле катете и хипотенузе. *Тангенс* угла је количник наспрамне и налегле катете, а реципрочно, *котангенс* је количник налегле и наспрамне катете. Тако, на слици 3.21 имамо, истим редом:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{3.13}$$

То су основне тригонометријске функције.

Задатак 3.4.1. *Израчунати оштре углове (у степенима, минутама и секундама) троугла са страницама:*

(а) 3, 4 и 5 метара (египатски троугао);

(б) 5, 12 и 13 јединица дужине.

Задатак 3.4.2. *Помоћу квадрата подељеног дијагоналом показати да је:*

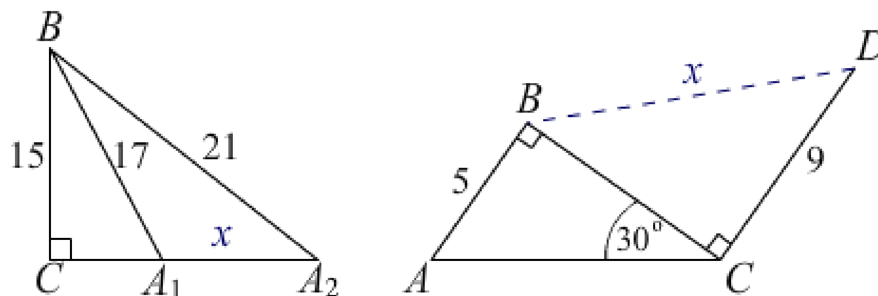
$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45° = 1, \quad \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

Задатак 3.4.3. *Помоћу једнакостраничног троугла показати да је:*

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

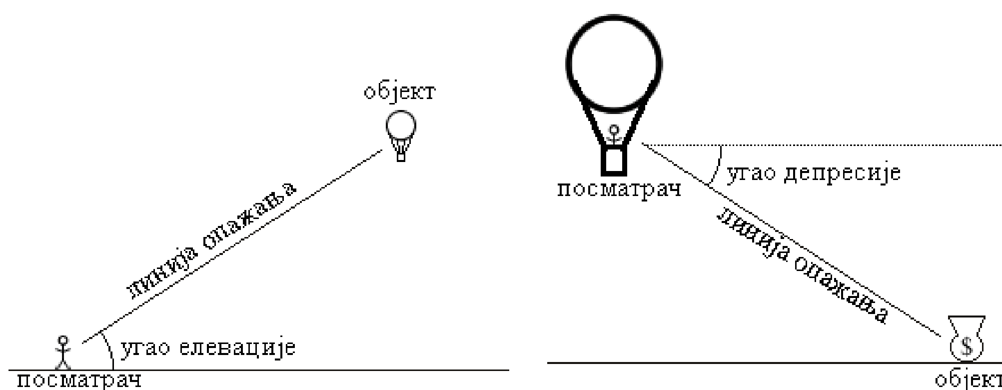
Задатак 3.4.4. *Дати су правоугли троуглови A_1BC A_2BC, на слици 3.22 лево. Наћи дужину $x = A_1A_2$.*



Slika 3.22: Правоугли троуглови A_1BC A_2BC.

Задатак 3.4.5. *Дужи $AB = 5$ cm и $CD = 9$ cm су окомите на дуж BC, као на слици 3.22 десно. Угао $\angle BCA = 30^\circ$. Израчунати дужину $x = BD$.*

Угао *елевације* види посматрач на земљи, између правца хоризонта и линије опажања објекта на небу, као на слици 3.23 лево. Угао *депресије* види посматрач на узвисини, између хоризонталног правца и линије опажања објекта испод хоризонта, као на слици 3.23 десно.

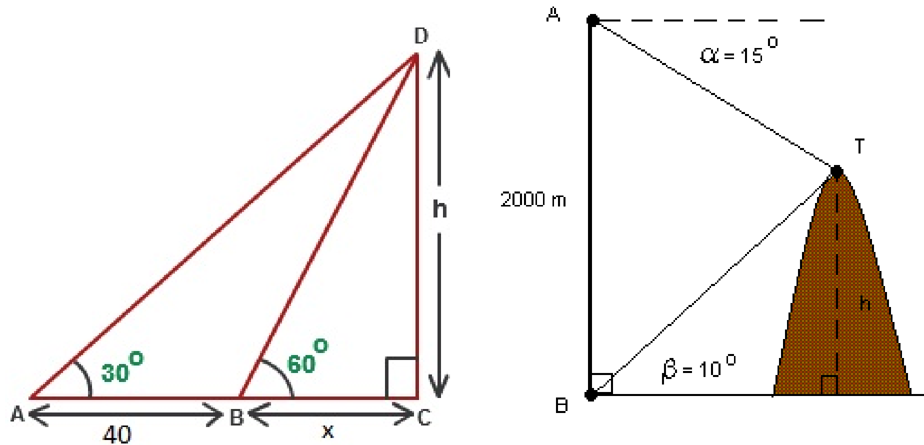


Slika 3.23: Угао елевације и депресије.

Задатак 3.4.6. *Балон се подиже вертикално и посматра се његов угао елевације са места удаљеног 250 метара од узлетишта. У једном тренутку угао елевације балона био је* 35°, *а након две минуте тај угао био је* 60°. *Којом брзином, у km/h, се балон подизао?*

Задатак 3.4.7. *Авион лети по правој линији брзином* 900 *километара на час, на сталној висини* h. *Посматрач на земљи је у једном тренутку опазио елевацију авиона* 20°, *а након једне минуте* 60°. *На којој је висини авион?*

Задатак 3.4.8. *Особа стоји на обали реке и види врх дрвета на супротној обали под углом елевације* 60° *(слика 3.24 лево). Када се одмакне 40 метара од обале тај угао је* 30°. *Наћи (а) висину дрвета, (б) ширину реке, на две децимале*[23].



Slika 3.24: л: Дрво h иза реке x. д: Планина h.

Задатак 3.4.9. *Као на слици 3.24 десно, када се врх* T *планине гледа из тачке* A *са висине* 2000 m *од тла, угао депресије је* $\alpha = 15^\circ$, *а са тла из тачке* B *угао елевације је* $\beta = 10^\circ$. *Ако су тачке* A *и* B *на истој вертикали, наћи висину планине у метрима, приближно до једне децимале*[24].

Задатак 3.4.10. *Израчунати непознате дужине* x *у графицима на слици 3.25.*

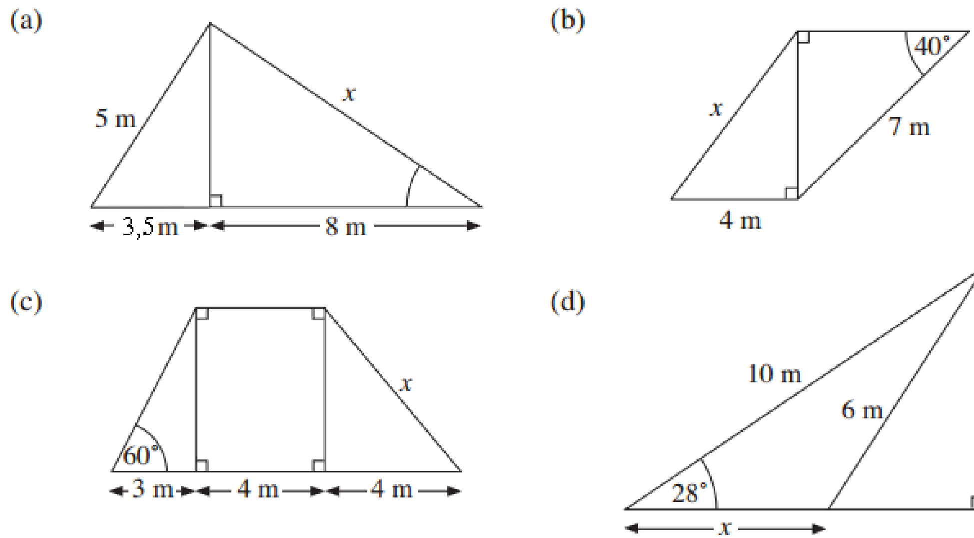
У следећа три задатка проверавамо основне тригонометријске једнакости. Прва од њих се назива и тригонометријском Питагорином теоремом.

Задатак 3.4.11. *Доказати да за сваки угао* α *важе једнакости:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1.$$

[23] в. сајт http://math.tutorvista.com/

[24] в. сајт http://www.analyzemath.com/



Slika 3.25: Решавањем троугла наћи непознату дужину x.

Задатак 3.4.12. *Доказати да је увек:*

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Задатак 3.4.13. *Доказати да за све комплементне углове α и β важе једнакости:*

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta.$$

Зашто нам требају основне тригонометриске једнакости, видећемо делом из пар следећих задатака.

Задатак 3.4.14. *Знајући једну, израчунати остале тригонометријске функције датог угла:*

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{5}, \quad \operatorname{tg}\phi = 2, \quad \operatorname{ctg}\theta = 1,5.$$

Идентитет је једнакост која је скоро увек тачна, за разлику од *једначине* која је такође једнакост али скоро увек нетачна. На примјер, једнакост $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ је идентитет јер је тачна за сваки број x осим за нулу, а једнакост $2x + 3 = 5$ је једначина јер је нетачна за сваки број x осим за јединицу.

Примјер 3.4.15. *Доказати тригонометријски идентитет*

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2.$$

Рјешење. Користимо позната алгебарска правила и основне тригонометријске идентитете из задатка 3.4.11. Дата једнакост је еквивалентна са следећима, редом:

$$(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x) = 2,$$

$$(1-2\sin x\cos x)+(1+2\sin x\cos x)=2,$$
$$2=2,$$

што је увек тачно. Свака у низу једнакости била је једнако тачна, па је свака од њих идентитет, укључујући и прву. □

Задатак 3.4.16. *Доказати тригонометријске идентитете:*

$$\sin x-\sin x\cos^2 x=\sin^3 x,\quad \sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x.$$

Задатак 3.4.17. *Доказати тригонометријске идентитете:*

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sin x\cos x},\quad \frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\operatorname{tg} x.$$

Задатак 3.4.18. *Доказати тригонометријске идентитете:*

$$\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=1,\quad \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1}=\sin^2 x,$$
$$\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+\sin x},\quad 1-2\cos^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+1}.$$

Реципрочне тригонометријске функције *косеканс* и *секанс* произвољног угла ϕ дефинсане су једнакостима:

$$\csc\phi=\frac{1}{\sin\phi},\quad \sec\phi=\frac{1}{\cos\phi}. \tag{3.14}$$

Задатак 3.4.19. *Доказати тригонометријске идентитете:*

$$\operatorname{tg} x\sin x+\cos x=\sec x,\quad \operatorname{tg}^2 x=\csc^2 x\operatorname{tg}^2 x-1,$$
$$\sec x+\operatorname{tg} x=\frac{\cos x}{1-\sin x},\quad (\sin x+\cos x)(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=\sec x+\csc x.$$

Примјер 3.4.20. *Решити тригонометријску једначину:*

$$3\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}^2 x+1=\operatorname{tg} x.$$

Рјешење 3.4.20. Преводимо све лево и растављамо на факторе:

$$3\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1=0,$$
$$(3\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg} x-1)=0,$$
$$(\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1)(\sqrt{3}+\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x-1)=0.$$

Десно је нула, а производ је нула када је било који од фактора нула. Према томе имамо три решења:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{tg} x=1,$$
$$x_1=30^\circ\quad x_2=?\quad x_3=45^\circ.$$

Прво и треће следи из задатака 3.4.2 и 3.4.3, а за друго рјешење ће нам требати још тригонометрије. □

Задатак 3.4.21. *Решити тригонометријске једначине:*

$$i.\ 2\sin 3x - 1 = 0, \quad ii.\ \sqrt{2}\cos 5x - 1 = 0,$$

$$iii.\ 4\sin x\cos x - 2\sin x = 2\cos x - 1, \quad iv.\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Задатак 3.4.22. *Наћи решења тригонометријских једначина:*

$$i.\ \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x, \quad ii.\ \frac{7\sin 3x - 6\cos 3x}{\sin 3x + 2\cos 3x} = \operatorname{tg} 3x.$$

Примјер 3.4.23. *Решити неједначину:*

$$|3\sin x - 1| \le \frac{1}{2}.$$

Рјешење 3.4.23. Ослобађамо се апсолутне вриједности и добијамо две неједначине:

$$-\frac{1}{2} \le 3\sin x - 1 \le \frac{1}{2}.$$

Првој, па другој додајемо 1 и формирамо неједнакости:

$$\frac{1}{2} \le 3\sin x \le \frac{3}{2}.$$

Леву па десну неједнакост делимо са 3:

$$\frac{1}{6} \le \sin x \le \frac{1}{2},$$

а отуда:

$$9,59^\circ \le x \le 30^\circ.$$

□

Задатак 3.4.24. *Решити једначине са апсолутним вриједностима:*

$$|2\operatorname{ctg} x - 1| + 3 = 6, \quad |3\operatorname{tg} x - 6| - 9 = -3,$$

$$|\operatorname{tg} x - 7| = |2\operatorname{tg} x - 2|, \quad |\sin x - 3| = |\sin x + 2|,$$

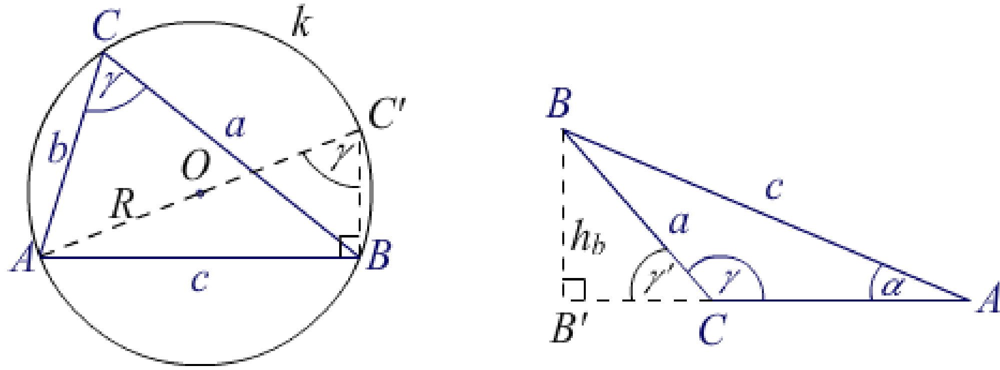
Задатак 3.4.25. *Решити тригонометријске неједначине:*

$$|2\operatorname{tg} x + 3| < \operatorname{tg} x + 6, \quad |5 - 4\cos x| + 2 < 6.$$

Теорема 3.4.26 (Синусна)**.** *За произвољан троугао ABC важе једнакости:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

гдје су a, b и c странице наспрам истоимених темена троугла, са угловима редом α, β и γ, а $2R$ је пречник описане кружнице.



Slika 3.26: Оштар и тупи угао γ троугла ABC.

Доказ. Дат је произвољан троугао ABC са описаном кружницом $k(O,R)$, као на слици 3.26 лево. Нека је у темену C оштар угао γ. Изаберимо тачку $C' \in k$ тако да је дужина $AC' = 2R$. Троугао ABC' је правоугли, са правим углом у темену B и са углом γ у темену C', одакле лако налазимо $c = 2R\sin\gamma$, а отуда једна од тражених једнакости. Симетрично добијамо и остале.

Ако је у темену C тупи угао $\gamma > 90°$, онда је угао у темену A оштар, па на претходни начин доказујемо $a = 2R\sin\alpha$, а затим користимо исту слику 3.26 десно. На продужетку странице AC је подножје висине $h_b = BB'$, а из правоуглих троуглова ABB' и CBB' добијамо $h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma'$, а отуда

$$\frac{c}{\sin\gamma'} = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Међутим, синуси суплементних углова γ и γ' су једнаки. □

Са слике 3.26 десно, за тупи угао γ налазимо редом:

$$h_b^2 = a^2 - x^2 = c^2 - (b+x)^2, \quad x = B'C,$$

$$a^2 = c^2 - b^2 - 2bx, \quad x = a\cos\gamma',$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2, \quad \cos\gamma = -\cos\gamma',$$

а то је једна од једнакости, косинусне теореме. Слично доказујемо за оштар угао γ и симетрично за остале углове троугла.

Теорема 3.4.27 (Косинусна). *За произвољан троугао ABC важе једнакости:*

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \end{cases}$$

са наспрамним страницама a, b, c темена са угловима редом α, β, γ.

Косинусна теорема поопштава Питагорину теорему. У случају када је $\gamma = 90°$, тада је $\cos\gamma = 0$, па трећа једначина постаје

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

а то је Питагорина теорема. То видимо и на следећем примјеру.

Примјер 3.4.28. *Странице троугла ABC су $a = 5$, $b = 12$ и $c = 13$. Наћи угао у темену C.*

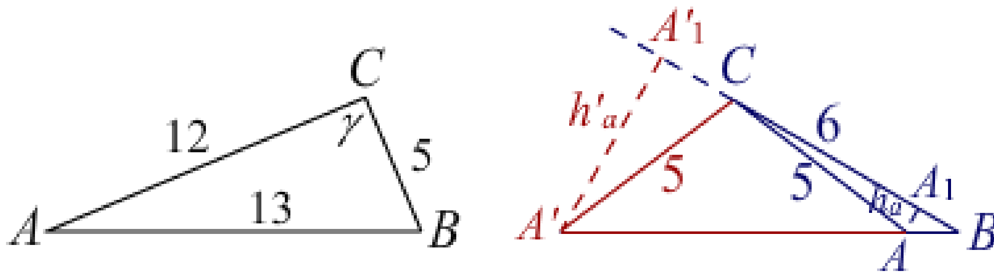
Рјешење. Из косинусне теореме, треће једначине, имамо редом:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$13^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot \cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = 0,$$

односно $\gamma = 90°$. То је правоугли троугао, на слици 3.27 лево. □



Slika 3.27: Правоугли и разнострани троугао.

Примјер 3.4.29. *Дат је разнострани троугао ABC са страницама $BC = 6$, $AC = 5$ и углом $\angle ABC = 30°$. Наћи дужину странице AB ако је удаљеност од темена A до странице BC мања од $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Рјешење. На слици 3.27 десно видимо да могу бити два троугла ΔABC и $\Delta A'BC$, оба са страницама $a = 6$, $b = 5$ и $\beta = 30°$. Таква двозначност следи из синусне теореме:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta = \frac{6}{5} \cdot \sin 30° = \frac{3}{5},$$

$$\alpha' = 36,87°, \quad \alpha = 143,13°,$$

јер су синуси суплементних углова $(\alpha' + \alpha = 180°)$ једнаки.

Два решења добијамо и из косинусне теореме:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$

$$5^2 = c^2 + 6^2 - 2c \cdot 6 \cdot \cos 30°,$$

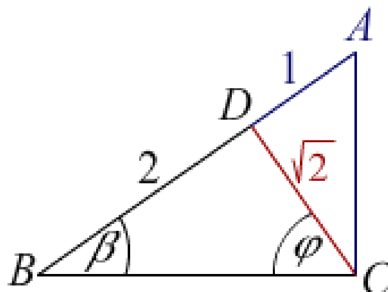
$$25 = c^2 + 36 - 12c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$c^2 - 6\sqrt{3}c + 11 = 0.$$

Да су могућа два решења $c = 3\sqrt{3} - 4$ и $c' = 3\sqrt{3} + 4$ ове квадратне једначине, лако се проверава уврштавањем, $(3\sqrt{3} \pm 4)^2 - 6\sqrt{3}(3\sqrt{3} \pm 4) + 11 = 0$, што је у оба случаја „±" тачно. Међутим, само краћа страница $c = AB$ испуњава додатни услов задатка, да је висина $h_a < \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Решавање троугла значи налажење страница и углова датог троугла. Већ из претходна два примјера је јасно да су у тој врсти задатака веома корисне синусна и косинусна теорема.

Примјер 3.4.30. *Дат је правоугли троугао ABC, $\angle C = 90°$, са тачком $D \in AB$ на хипотенузи таквом да је $AD = 1$, $DC = \sqrt{2}$ и $BD = 2$. Наћи угао $\angle DCB = \varphi$.*



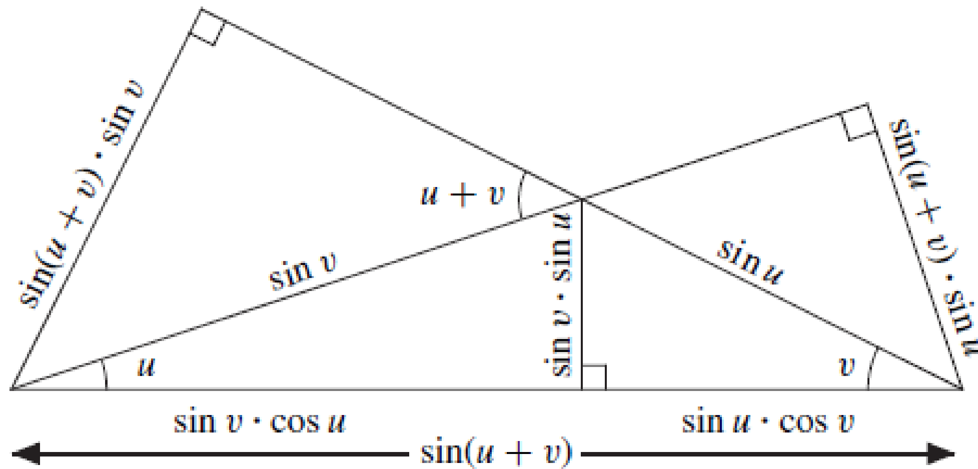
Slika 3.28: Правоугли троугао ABC.

Рјешење. На слици 3.28, из ΔBDC и ΔADC налазимо:

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\varphi}, \quad \frac{CD}{\sin(90° - \beta)} = \frac{AD}{\sin(90° - \varphi)},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi, \quad \cos\beta = \sqrt{2}\cos\varphi,$$

па квадрирањем и сабирањем налазимо $1 = 3\cos^2\varphi$, односно $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, одакле $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} = 54,7°$. □



Slika 3.29: $\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v$.

Задатак 3.4.31. *Користећи слику 3.29 доказати да је тачна формула за синус збира углова u и v:*

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v. \tag{3.15}$$

Задатак 3.4.32. *Користећи особине парности синусне и непарности косинусне функције доказати адиционе формуле за синус и косинус:*

$$\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.\end{cases} \tag{3.16}$$

Задатак 3.4.33. *Користећи адиционе формуле за синус и косинус доказати адиционе формуле за тангенс:*

$$\operatorname{tg}(u\pm v)=\frac{\operatorname{tg}u\pm\operatorname{tg}v}{1\mp\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}. \tag{3.17}$$

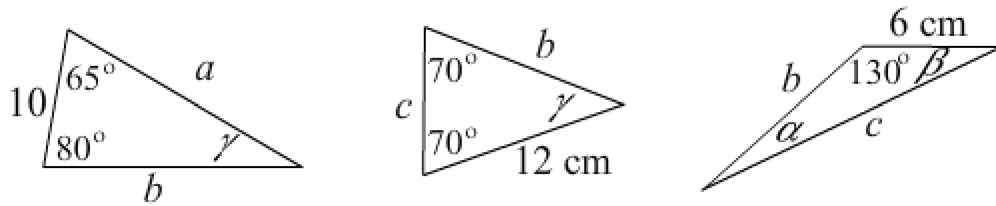
Задатак 3.4.34. *Без употребе калкулатора, или таблица, наћи непознате елементе троугла ABC.*

i. $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, *полупречник описаног круга* $R=2\sqrt{6}$;
ii. $a=2\sqrt{3}$ *cm*, $c=\sqrt{6}$ *cm*, $\beta=105^\circ$;
iii. $AB=24$ *cm*, $AC=9$ *cm*, $\alpha=60^\circ$.

Задатак 3.4.35. *Разлика страница a и b троугла ABC је 3 cm, угао* $\gamma=60^\circ$, *полупречник описане кружнице* $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ *cm. Одредити странице троугла.*

Задатак 3.4.36. *У кругу су дате две тетиве* $AB=8$ *cm и* $AC=5$ *cm чији је међусобни угао* $\alpha=60^\circ$. *Колики је полупречник круга?*

Задатак 3.4.37. *Наћи непознате елементе троуглова на слици 3.30.*



Slika 3.30: Решавање троуглова.

Примјер 3.4.38. *Странице троугла су $x-2$, x и $x+2$, а један угао је 120°. Колико је x и колике су странице?*

Рјешење. Наспрам највеће странице (рецимо $c = x+2$) је највећи угао ($\gamma = 120^\circ$), па је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, односно:

$$(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2 - 2x(x-2)\cos 120^\circ,$$

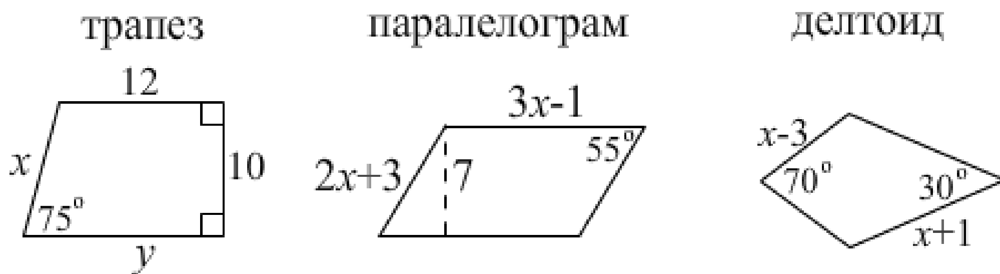
одакле добијамо $x^2 - 5x = 0$, тј. $x(x-5) = 0$. Само рјешење $x = 5$ је геометријски прихватљиво. Према томе $a = 3$, $b = 5$ и $c = 7$. □

Примјер 3.4.39. *Дат је произвољан троугао ABC са подразумеваним страницама a, b, c, углом $\gamma = \angle C$ и полупречницима уписане r и описане R кружнице. Доказати да је површина μ троугла ABC једнака било којем од израза:*

$$\mu_1 = rs, \quad \mu_2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad \mu_4 = \frac{abc}{4R}.$$

Трапез је четвороугао са паром паралелних страна, паралелограм са два пара паралелних страна, а делтоид је четвороугао са два пара суседних страна једнаких дужина.

Задатак 3.4.40. *Наћи непознате странице и углове четвороуглова на слици 3.31.*



Slika 3.31: Решавање четвороуглова.

Задатак 3.4.41. *У тетивном четвороуглу $ABCD$ је страница $DA = 1$, дијагонала BD је нормална на страницу BC, углови $\angle ABC = \angle BAD = 120^\circ$. Израчунати дужине странице CD и дијагонале BD.*

Glava 4

Симетрије

Симетрија је особина дела да се не мења приликом промене целине. У математици, симетрија је особина која остаје непромењена, *инваријантна* у датој трансформацији. У том смислу, изометрије и хомотетије су геометријске симетрије, а обе су тема овог дела Збирке.

Растојање у неком скупу[1] S дефинишемо за по два елемента. Када постоји функција $d : S^2 \to \mathbb{R}$ са особинама $(\forall A, B, C \in S)$:

i. $d(A, B) \ge 0$ - ненегативност;

ii. $d(A, B) = 0 \iff A = B$;

iii. $d(A, B) = d(B, A)$ - симетрија;

iv. $d(A, C) \le d(A, B) + d(B, C)$ - неједнакост троугла;

тада реалан број $d(A, B)$ називамо *растојање* између наведених елемената A и B, а бинарну функцију d називамо *метрика*.

Изометрија је пресликавање које чува растојање. Прецизније, пресликавање $f : S \to S$ произвољних елемената A и B скупа S у тај исти скуп, за које важи

$$d[(f(A), f(B)] = d(A, B) \tag{4.1}$$

је изометрија. Такве су геометријске рефлексије, ротације и транслације. За два троугла кажемо да су *подударни* ако постоји изометрија која један пресликава у други.

Када се колинеарне тачке функцијом $f : S \to S$ пресликавају у колинеарне и постоји константан коефицијент пропорционалности $\lambda \in \mathbb{R}$ такав да за сваки пар тачака $A, B \in S$ важи једнакост

$$d[f(A), f(B)] = \lambda d(A, B), \tag{4.2}$$

тада имамо пресликавање сличности (3.5), које у основи има *хомотетију*. Са константом $|\lambda| < 1$ хомотетија постаје контракција, са $|\lambda| > 1$ хомотетија је дилатација. Посебно, ако је $|\lambda| = 1$ хомотетија је изометрија. Према томе, изометрија (4.1) је специјални случај хомотетије (4.2).

[1] подразумева се да је скуп S равнина, а да су $A, B, C, \ldots$ тачке те равни

4.1 Подударност

Два троугла су подударна ако постоји изометрија која један троугао пресликава у други. Другим речима, троуглови су подударни ако имају једнаке, подударне све одговарајуће елементе. Међутим, да бисмо знали да су два троугла подударна, довољно је да знамо да имају једнака нека три од тих елемената.

Прецизније, за троуглове ΔABC и $\Delta A'B'C'$ кажемо да су конгруентни или *подударни*, што пишемо $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, ако имају једнаке:

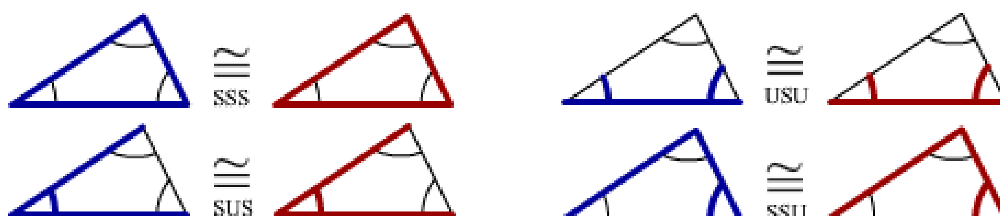
SSS - све три одговарајуће странице,

SUS - по две одговарајуће странице и њима захваћен угао,

USU: по једну страницу и на њој налегле углове,

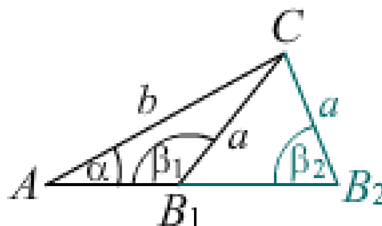
SSU: две странице и угао наспрам веће.

То су четири става подударности троуглова, приказана сликама 4.1.



Slika 4.1: Ставови подударности троуглова.

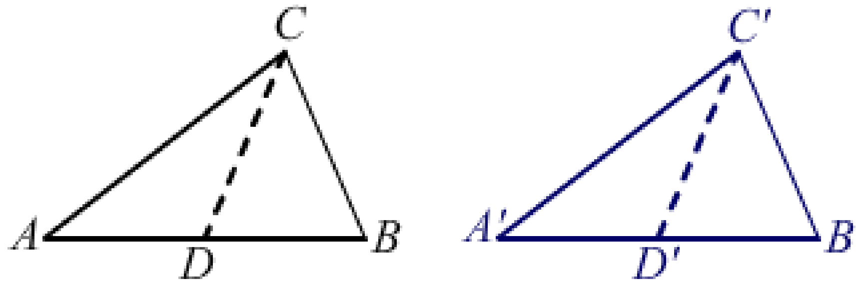
Прва три става су безусловна, четврти није. Када би у ставу SSU изоставили „угао наспрам веће стране“, тада не мора уследити подударност троуглова, као што се види на слици 4.2.



Slika 4.2: Две странице и угао.

Наиме, на слици се виде два троугла ΔAB_1C и ΔAB_2C, очигледно неподударна, мада имају две заједничке стране a, b и угао α. Угао α је наспрам мање стране, јер је $a < b$, па став SSU не важи.

Примјер 4.1.1. *Показати да су два троугла подударна ако су им подударне две странице и тежишне дужи које одговарају једној од њих.*



Slika 4.3: Два троугла са једнаким двема страницама и тежишницама.

Рјешење. Дати су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ такви да је $AC = A'C'$, $AB = A'B'$ са тежишницама $AD = A'D'$, као на слици 4.3. Подножја тежишница су тачке D и D' на срединама одговарајућих страница AB и $A'B'$. Према томе, $AD = A'D'$, па из става SSS следи $\Delta ADC \cong \Delta A'D'C'$. Отуда $\angle DAC = \angle D'A'C'$ па из става SUS следи $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Задатак 4.1.2. *Показати да су два троугла подударна ако су им једнаке две странице и висина на трећу страницу.*

Задатак 4.1.3. *Показати да су два троугла подударна ако су им једнаки једна страница, висина на ту страницу и тежишна дуж која одговара тој страници.*

Задатак 4.1.4. *Дијагонале паралелограма $ABCD$ секу се у тачки E.*
i Показати да је $\Delta ABE \cong \Delta A'B'E'$.
ii. Показати да је E средина обе дијагонале.

Задатак 4.1.5. *Дат је троугао ABC и две тачке $D, E \in BC$ тако да је $AB = AC$ и $AD = AE$. Показати да је $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.*

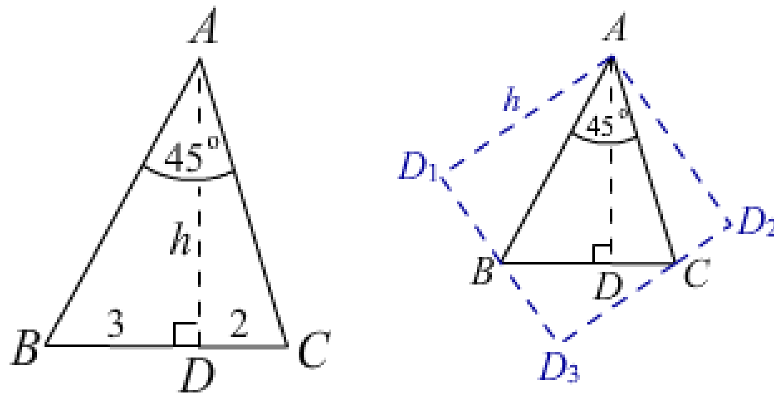
Задатак 4.1.6. *Над страницама троугла ABC конструисани су једнакостранични троуглови A_1BC, B_1AC и C_1BA. Доказати да су дужине AA_1, BB_1 и CC_1 једнаке.*

Задатак 4.1.7. *На симетрале вањских углова троугла ABC у тачкама A и B из темена C спуштене су нормале чији продужеци секу продужетке странице AB у тачкама M и N. Доказати да је дужина MN једнака обиму троугла.*

Следећих осам задатака[2] само на први поглед не укључују конгруенције. Међутим, када у датом проблему приметите подударне троуглове, на корак сте од решења.

Примјер 4.1.8. *У троуглу ABC из темена угла $\angle A = 45°$ повучена је висина AD која дијели супротну страницу на одсјечке дужина $BD = 3$ и $DC = 2$. Наћи површину троугла ABC.*

[2]Singapore Mathematical Societey: `http://sms.math.nus.edu.sg/`



Slika 4.4: Угао $\angle A = 45°$, дужине $BD = 3$ и $DC = 2$.

Рјешење. Означимо страницу датог троугла $BC = a$, а висину $AD = h$. Додајмо правоугле троуглове $\Delta ABD_1 \cong \Delta ABD$ и $\Delta ACD_2 \cong \Delta ACD$. Конструишимо продужетке страница, тако да је $D_1 - B - D_3$ и $D_2 - C - D_3$, као на слици 4.4.

Зато што је $\angle D_1AB + \angle CAD_2 = \angle BAC = 45°$ биће $\angle D_1AD_2 = 90°$. Углови у теменима D_1, D_2 четвороугла $D_1AD_2D_3$ су прави, па је тај четвороугао правоугаоник. Како је $AD_1 = AD = AD_2$ тај правоугаоник је квадрат странице h.

Због $BD_1 = BD = 3$ и $CD_2 = CD = 2$, биће $BD_3 = h - 3$ и $CD_3 = h - 2$. Троугао BD_3C је правоугли, па Питагорина теорема даје, редом:

$$(h-3)^2 + (h-2)^2 = 25,$$

$$h^2 - 5h - 6 = 0,$$

$$(h-6)(h+1) = 0.$$

Дакле, висина $h = AD$ троугла ABC је дужине $h = 6$, тако да је тражена површина троугла $P(ABC) = \frac{1}{2}ah = 15$. □

Задатак 4.1.9. *Унутар једнакокраког правоуглог троугла ΔABC, гдје је $AC = AB$ и $\angle A = 90°$, дата је таква тачка D да је $BD = BA$ и $\angle DBA = 30°$. Доказати да је тада $DA = DC$.*

Задатак 4.1.10. *Једнакокраки троугао ABC у којем $\angle A = \angle B = 80°$ има чевијан AM повучен на страницу BC тако да је $CM = AB$. Наћи $\angle AMB$.*

Задатак 4.1.11. *У правоуглом троуглу ABC, гдје је $\angle C = 90°$ и $\angle A = 30°$, дуж $DE \perp AC$ спаја катету $D \in AC$ и хипотенузу $E \in AB$. Наћи дужину те дужи, ако је $AD = CB$ и $DE + AC = 4$.*

Задатак 4.1.12. *Ортоцентар H троугла ΔABC је унутар троугла. Ако је $BH = AC$, наћи $\angle B$.*

Задатак 4.1.13. *У квадрату $ABCD$ страница јединичне дужине, тачке $P \in AB$ и $Q \in AD$. Обим троугла ΔAPQ је 2. Колики је угао $\angle PCQ$?*

Задатак 4.1.14. *На троуглу ΔABC извана су дописани једнакостранични троуглови ΔABD и ΔACE. Дужи DC и EB секу се у тачки P. Наћи $\angle APD$.*

Задатак 4.1.15. *Унутар једнакостраничног троугла ΔABC дата је тачка D таква да је $DA = DB$. Изван се налази тачка E таква да је $\angle DBE = \angle DBC$ и $BE = AB$. Наћи $\angle E$.*

Геометријске конструкције се обављају једино шестаром и лењиром без поделе. У основној школи се учи да је то поступак од четири корака: анализе, конструкције, доказа и дискусије, а овдје ћемо у овом току, као важан део приметити и подударност троуглова.

Основне геометријске конструкције су: пренос дужи, пренос угла, конструкција симетрала дужи и угла, конструкција паралеле са датом правом кроз дату тачку, конструкција нормале на дату праву кроз дату тачку, дељење дужи у датој размери, и наравно, конструкције SSS, SUS, USU и SSU. Овдје подразумевамо да су све ове конструкције познате.

Задатак 4.1.16. *Конструисати троугао ΔABC са следећим датим елементима:*

$$SSS: \ a, b, c; \quad SUS: \ a, b, \gamma; \quad USU: \ \alpha, \beta, c, \quad SSU: \ \alpha, \beta, a.$$

Потсетимо се подразумеваних ознака ΔABC. Наспрам темена A, B, C су странице редом a, b, c. Истим редом, у теменима су унутрашњи углови углови α, β, γ, а из темена полазе висине h_a, h_b, h_c и тежишнице t_a, t_b, t_c. Обим троугла је $2s$.

У следећих неколико иначе добро познатих примјера се демонстрирају основне методе које користимо при конструкцијама. Прва је метода пресека.

Примјер 4.1.17. *Конструисати троугао ABC коме су задате дужине a и b две његове странице и дужина висине h_c на трећу.*

Рјешење. 1. Анализа.

Тачка C мора бити удаљена од праве BC за h_c, од тачке A за b, а од тачке B за a. Први услов је да тачка C буде на нормали на праву AB и од ње удаљена за h_c, скуп свих тачкака које задовољавају други услов је кружница $k(C, b)$ са центром у C и полупречником b, а скуп свих тачака које задовољавају трећи услов је кржница $k(C, a)$.

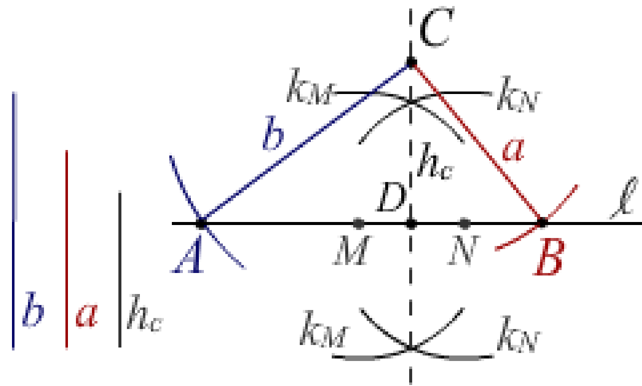
2. Конструкција, као на слици 4.5.

Кроз произвољне тачке M, N конструишемо праву ℓ, а око истих тачака опишемо и кружнице k_M, k_N једнаког полупречника $r > MN$. Пресек кружница дефинише норамалу на праву ℓ, чији пресек са ℓ је тачка D. На нормали одредимо тачку C удаљену $h_c = CD$ од праве ℓ. Опишемо две кружнице $k_A = k(C, b)$ и $k_B = k(C, a)$, а пресеке тих кружница са правом ℓ означимо редом са A и B. Имамо троугао ABC.

3. Доказ је на основу анализе очигледан.

4. Дискусија.

Задатак има 0, 2 или 4 решења према томе да ли је b мање, једнако или веће од h_a. У случају када задатак има 2 или 4 решења, по два су подударна и то су она која се обично посматрају. □



Slika 4.5: Конструкција троугла са a, b, h_c.

Приметите аналогију овог и задатка 4.1.2. Уопште, када год су дати елементи са којима су два троугла подударна, то значи да је са тим елементима одређен троугао, те да би се такав можда могао и конструисати. Друга је метода помоћних фигура.

Примјер 4.1.18. *Конструисати правоугли троугао ΔABC, ако је задан његов оштар угао α и збир дужина његових катета $a + b$.*

Рјешење. 1. Троугао ΔABC можемо допунити продужавањем катете AC до дужине $a + b$, или продужавањем катете BC. Бирамо прву, продужењем за a до тачке D. Троугао ABD има страницу $AD = a + b$ и углове $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADB = 45°$.

2. Конструишемо $AD = a + b$, полуправу $\angle DAp = \alpha$ (пренос угла) и полуправу $\angle ADq = 45°$ (симетрала правог угла). Затим налазимо пресек $B = p \cap q$ и вучемо нормалу из тачке B у тачку $C \in AD$. Имамо троугао ABC.

3. Доказ је на основу анализе очигледан.

4. Задатак увек има једно рјешење. □

Методе осне симетрије, ротације, транслације и сличности ћемо разматрати касније, када се будемо бавили осталим задацима у вези са тим симетријама.

Задатак 4.1.19. *Конструисати троугао ΔABC ако су дате тачке A_1, B_1 и C_1 које су подножја његових висина*[3].

Задатак 4.1.20. *Дате су две дужи a и b. Конструисати њихову геометријску средину.*

[3]Троугао $A_1B_1C_1$ је ортички, или педални троугла ABC из тачке H, његовог ортоцентра.

Задатак 4.1.21. *Конструисати правоугли троугао када је задата хипотенуза c и зна се да је медијана (тежишница) на хипотенузу геометријска средина катета*[4].

Задатак 4.1.22. *Конструисати троугао ΔABC ако су дати следећи елементи:*

$$i)\ h_a, h_c, t_a; \quad ii)\ a, h_a, t_a; \quad iii)\ a, h_a, \alpha; \quad iv)\ b, h_c, a+c.$$

Задатак 4.1.23. *Конструисати троугао ΔABC ако су дати следећи елементи:*

$$i)\ \alpha, \beta, 2s; \quad ii)\ \alpha, \beta, b-c; \quad iii)\ c, a-b, \alpha-\beta; \quad iv)\ a, b+c, \beta-\gamma.$$

Задатак 4.1.24. *Конструисати троугао ΔABC ако је дат угао α, страница a и полупречник уписане кружнице r.*

Задатак 4.1.25. *Конструисати квадрат ако је дато једно теме и по једна тачка на страницама које не садрже то теме*[5].

Задатак 4.1.26. *Конструисати паралелограм $ABCD$, ако су дати теме A и средине две странице, тачке $M \in BC$ и $N \in CD$.*

Задатак 4.1.27. *Конструисати квадрат $ABCD$, ако су дати његов центар описане кружнице и две тачке на две његове странице.*

Задатак 4.1.28. *Унутар датог троугла наћи тачку из које се све три његове странице виде под истим углом.*

Међутим, није могуће геометријском конструкцијом решити баш све задатке. Међу таквим „нерешивим“ проблемима који су од античког времена до недавно мучили математичаре, најпознатија су следећа три.

1. Трисекција угла. Дат је произвољан угао, а треба конструисати његову трећину.

2. Квадратура круга. Дат је полупречник круга, а треба конструисати страницу квадрата исте исте површине као круг.

3. Удвостручење коцке. Дата је страница коцке, а треба конструисати страницу коцке са двоструком запремином.

Нерешивост првог и другог задатка кориштењем само шестара и лењира без поделе доказао је Ванцел[6] 1837. године, а нерешивост другог доказао је Линдерман[7] 1882. године.

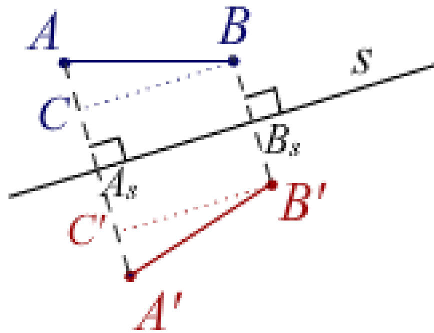
Ови „нерешиви“ задаци се, наравно, лако решавају другим[8] методама.

[4] Међународна математичка олимпијада 1959. године.
[5] в. `http://pf.unze.ba/nabokov/`
[6] Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), француски математичар.
[7] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939), немачки математичар.
[8] рецимо техничким

4.2 Изометрија

Изометрије, или изометријске трансформације, су таква пресликавања код којих удаљености и углови остају непромењени. Прецизније, то су функције (4.1), дакле: рефлексије, ротације и транслације.

Рефлексија равни π је *осна симетрија* $\rho_s : X \to X'$ дефинисана правом $s \in \pi$ и копијом X' произвољне тачке $X \in \pi$ таквом да је $XX' \perp s$, $XX' \cap s = X_s$ и$XX_s = X_sX'$.



Slika 4.6: Рефлексија $\rho_s : AB \to A'B'$.

На слици 4.6 видимо рефлексију ρ_s дужи AB у дуж $A'B'$. Права се пресликава у праву. Троугао ABC пресликава се у подударан троугао $A'B'C'$, али супротне орјентације. Просторна (3-дим) рефлексија ρ_σ била би одраз фигуре у огледалу, преко огледалске равни σ, који је такође подударан са оригиналом, али супротне орјентације.

Задатак 4.2.1. *Нацртати произвољан троугао и пресликати га осном симетријом у односу на праву која сече две његове странице.*

Задатак 4.2.2. *Дат је троугао са теменима $A(2,-1)$, $B(3,2)$ и $C(-1,0)$ у Oxy Декартовом правоуглом систему координата. Наћи осно симетричну слику тог троугла ако је оса симетрије s:*

i. апсциса, тј. $s = x$-оса;

ii. ордината, тј. $s = y$-оса;

iii. симетрала I и III квадранта, тј. s је права $y = x$.

Примјер 4.2.3. *Конструисати квадрат $ABCD$ чија два супротна темена A и C припадају датој правој p, а друга два темена B и D припадају датим круговима k_1 и k_2.*

Рјешење. 1. Анализа. Претпоставимо да је задатак решен. Нацртај слику! Осна симетрија $\rho_p : ABCD \to ADCB$, затим $\rho_p : k_1 \to k_1'$ и $\rho_p : k_2 \to k_2'$, при чему је $k_1' \cap k_2 = D$ и $k_2' \cap k_1 = B$.

2. Конструкција. $k_2' = \rho_p(k_2)$, бирамо једну од две $B = k_2' \cap k_1$, затим $\rho_p(B) = D$. Центар квадрата (пресек дијагонала) је тачка $O = p \cap BD$, а темена A C одредимо тако да је $OD = OB = OC = OA$.

3. Доказ следи непосредно из дефиниције осне симетрије и њене особине да је изометрија.

4. Дискусија. Задатак има 2, 1 или 0 решења, у зависности од тога да ли се кругови k_2' и k_1 редом секу, додирују или немају заједничких тачака. □

Задатак 4.2.4. *Дате су две произвољне тачке A, B и права p. Конструисати тачку $P \in p$ такву да је збир дужина $AP + PB$ минималан.*

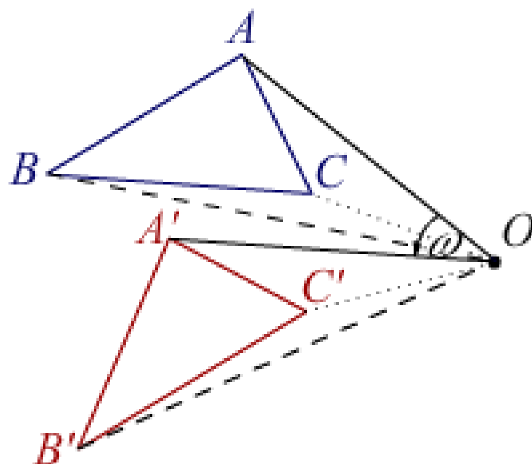
Задатак 4.2.5. *Дате су две произвољне тачке A, B и права p. Конструисати тачку $P \in p$ такву да је разлика дужина $|AP - PB|$ максимална.*

Тангента је права која додирује кружницу. Пресек кружнице и њене тангенте је тангентна тачка. Кружнице означавамо са малим словом латинице, рецимо k, или детаљније са $k(O, r)$ гдје је тачка O центар круга, а дужина r полупречник.

Задатак 4.2.6. *i. Из дате тачке конструисати тангенте на дату кружницу.*
ii. Конструисати унутрашње тангенте на две дате кружнице.

Задатак 4.2.7. *Дате су кружница k и права a. Конструисати кружницу k' која додирује обе и:*
i. садржи дату тачку $K \in k$;
ii. садржи дату тачку $A \in a$.

Ротација је трансформација тачака у равни задата једном тачком и једним орјентисаним углом. Дата тачка се назива центар ротације. Позитиван смер ротације је супротан смеру казаљке на сату.



Slika 4.7: Ротација $\rho(O, \omega): ABC \to A'B'C'$.

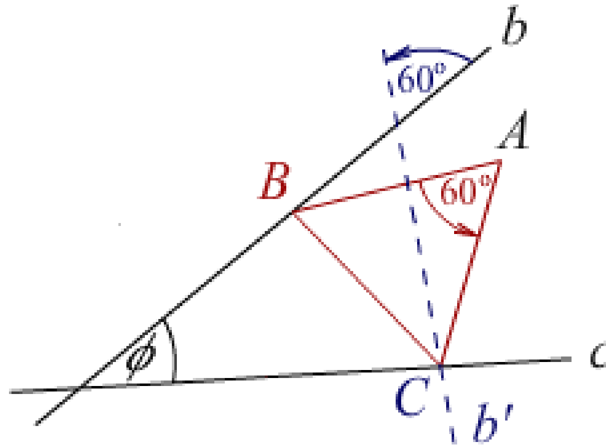
Прецизније, ротација ρ око дате тачке O за дати угао ω је пресликавање тачке A у тачку A' за угао $\angle AOA' = \omega$, при чему је $OA = OA'$. На слици 4.7 је приказана ротација $\rho : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$ са центром O и орјентисаним углом ω.

Задатак 4.2.8. *Доказати да је ротација са слике 4.7 изометрија.*

Задатак 4.2.9. *Наћи центар O и угао ω ротације $\rho : AB \to A'B'$ која преводи две дате подударне дужи једну у другу.*

Примјер 4.2.10. *Дате су тачка A и праве b и c. Конструисати једнакостраничан троугао ABC тако да је $B \in b$ и $C \in c$.*

Рјешење. 1. Анализа. Нека је тражени троугао ABC. Имамо тачку A и унутрашњи угао 60° једнакостраничног троугла, па имамо ротацију $\rho(A, 60°) : AB \to AC$, којом ће се права b пресликати у праву b' заједно са тачком $B \to C$. Сада је јасно да је $\angle bb' = 60°$, а пресек $b' \cap c = C$, као на слици 4.8.



Slika 4.8: Ротација $\rho(A, 60°) : b \to b'$.

2. Конструкција. Конструишемо ротацију $\rho(A, 60°) : b \to b'$, затим налазимо пресек $b' \cap c = C$, па враћамо ротацијом $\rho(A, -60°) : C \to B$. Имамо тражени ΔABC.

3. Доказ је на основу анализе очигледан.

4. Број решења зависи од положаја тачке A у односу на дате праве b и c, и о величини угла ϕ између тих правих. Задатак нема решења ако је $A = b \cap c$ и $\phi \neq 60°$. Задатак има једно рјешење ако је $A \neq b \cap c$ и $\phi = 60°$. Задатак има два решења ако је $A \neq b \cap c$ и $\phi \neq 60°$. Задатак има бесконачно решења ако је $A = b \cap c$ и $\phi = 60°$. □

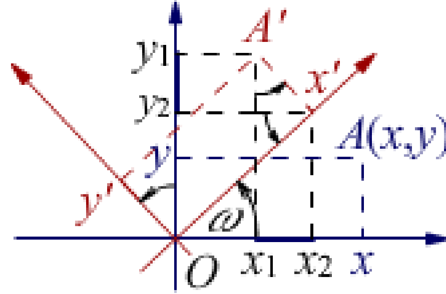
Задатак 4.2.11. *Дате су три паралелне праве. Конструисати:*

i. једнакостраничан троугао;

ii. квадрат;

чија три темена припадају трима датим правама.

На слици 4.9 приказана је ротација $\rho : A \to A'$ тачке $A(x,y)$ у тачку $A'(x',y')$ ротирањем Декартовог правоуглог система Oxy у $Ox'y'$ око његовог исходишта за угао ω. Како изразити нови положај дате тачке у старим координатама?



Slika 4.9: Ротација $\rho(O,\omega) : A \to A'$.

Задатак 4.2.12. *Проверити на слици 4.9:*

i. $x_2 = x\cos\omega$, $x_2 - x_1 = y\sin\omega$;

ii. $y_2 = x\sin\omega$, $y_1 - y_2 = y\cos\omega$;

iii. $x_1 = x\cos\omega - y\sin\omega$, $y_1 = x\sin\omega + y\cos\omega$.

Према томе, тачка $A(x,y)$ након ротације Декартовог система око исходишта O за угао ω долази на положај $A'(x_1,y_1)$ са координатама:

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\omega - y\sin\omega, \\ y_1 = x\sin\omega + y\cos\omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

У оба случаја A и A' су положаји писани у истом систему Oxy.

Примјер 4.2.13. *Представити исту ротацију (4.3) у два корака, за угао α па за угао β, тако да је $\alpha + \beta = \omega$.*

Рјешење. Након прве и друге ротације добијамо редом:

$$\begin{cases} x_\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y_\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_\omega = x_\alpha\cos\beta - y_\alpha\sin\beta, \\ y_\omega = x_\alpha\sin\beta + y_\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Уврштавањем прве у другу, након сређивања налазимо:

$$\begin{cases} x_\omega = x(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) - y(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta), \\ y_\omega = x(\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta) + y(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta). \end{cases} \tag{4.4}$$

Ова збирна ротација је еквивалент (4.3). □

Из решења (4.4) упоређивањем са (4.3) следе познате *адиционе формуле* за синус и косинус:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ове формуле се у тригонометрији изводе на различите друге начине. Приметимо да за $\alpha = \beta = 45^\circ$ на основу резултата 3.4.3 налазимо:

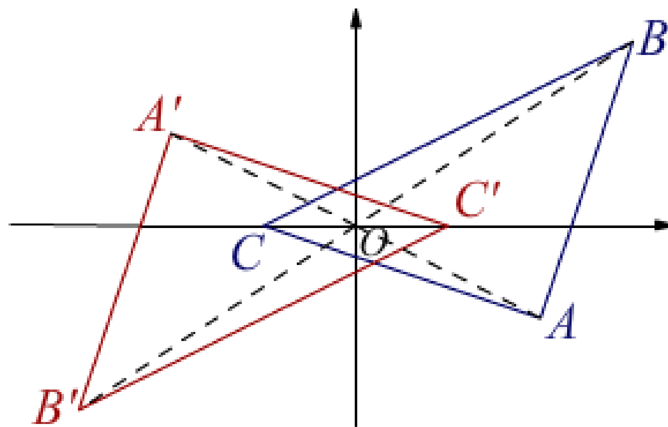
$$\begin{cases} \sin(45^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \cos 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \\ \cos(45^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Дакле $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$. Затим, на основу овог резултата користећи (4.5) и углове $\alpha = \beta = 90^\circ$ налазимо:

$$\begin{cases} \sin 180^\circ = \sin 90^\circ \cos 90^\circ + \cos 90^\circ \sin 90^\circ = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0, \\ \cos 180^\circ = \cos 90^\circ \cos 90^\circ - \sin 90^\circ \sin 90^\circ = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Дакле $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$. То можемо користити у следећем задатку.

Примјер 4.2.14. *Наћи координате троугла са теменима $A(2,-1)$, $B(3,2)$ и $C(-1,0)$ након ротације око O за 180° у Декартовом правоуглом систему координата Oxy.*



Slika 4.10: Централна симатрија $\rho_o : ABC \to A'B'C'$.

Рјешење. Резултат можемо добити помоћу трансформације координата (4.3) за угао ротације $\omega = 180^\circ$, када помоћу (4.7) налазимо:

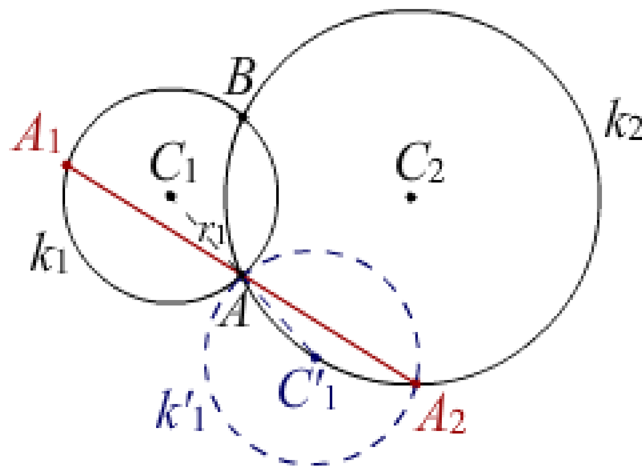
$$\begin{cases} x_1 = x \cos 180^\circ - y \sin 180^\circ = -x, \\ y_1 = x \sin 180^\circ + y \cos 180^\circ = -y. \end{cases}$$

Према томе тачке $A(2,-1)$, $B(3,2)$ и $C(-1,0)$ прелазе на положаје $A'(-2,1)$, $B'(-3,-2)$ и $C'(1,0)$ редом, што се види на слици 4.10. □

Други начин да разумемо исто рјешење је непосредно геометријски. Ротација за 180° око тачке O је *централна симетрија* којој је тачка O центар. Произвољну тачку A централном симетријом $\rho_o : A \to A'$ пресликавамо у тачку A' када је $A - O - A'$ и $AO = OA'$.

Да је централна симетрија изометрија следи непосредно из те особине ротације и чињенице да је она посебна врста ротације. Други начин да се то докаже је „чисто“ геометријски. Наиме, на слици 4.10, према SUS је $\Delta ABO \cong \Delta A'B'O$, а отуда $AB = A'B'$. Слично добијамо и за остале две странице датог троугла, па према ставу SSS имамо $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Ова подударност, оригиналног троугла и копије, значи да је централна симетрија изометрија.

Примјер 4.2.15. *Дате су две кружнице k_1 и k_2 које се секу у тачкама A и B. Кроз сваку од тих тачака повући праву која на кружницама одсеца тетиве једнаких дужина.*



Slika 4.11: Централна симетрија $\rho_A : k_1 \to k_1'$.

Рјешење. Једно рјешење је тетива AB. Остала два дају централне симетрије око датих тачака A и B. На слици 4.11 је приказана једна од тих $\rho_A : A_1 \to A_2$.

Конструишемо слику центра кружнице ($C_1 \to C_1'$), затим шестаром узимамо полупречник ($r_1 = AC_1$) и цртамо слику кружнице (k_1'). Пресек слике и друге дате кружнице ($A_2 = k_1' \cap k_2$) дефинише тетиву AA_2 унутар другог круга (k_2), која је због централне симетрије једнака тетиви AA_1 унутар круга k_1.

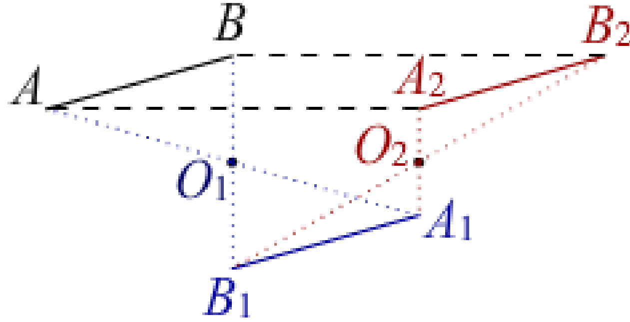
Задатак увек има три решења, праве AB, $A_1 - A - A_2$ и аналогно $B_1 - B - B_2$. □

Задатак 4.2.16. *Дате су кружница $k(O,r)$ и тачка A. Конструисати праву која пресеца кружницу у тачкама B, C таквим да су дужине $AB = BC$.*

Задатак 4.2.17. *Дата је тачка S и две праве a и b које се секу и не садрже S. Конструисати дуж AB такву да јој је S средиште, $A \in a$ и $B \in b$.*

Задатак 4.2.18. *Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 паралелне тетиве неког круга. Тачке A', B', C' су симетричне редом тачкама A_1, B_1, C_1 у односу на средишта дужи BC, CA, AB. Доказати да су тачке A', B', C' колинеарне.*

Композиција две централне симетрије је *транслација.* На слици 4.12 дуж AB се симетријом око центра O_1 копира у дуж A_1B_1, а затим се та копија копира даље симетријом око центра O_2 у дуж A_2B_2.



Slika 4.12: Централне симетрије $\rho_1 : AB \to A_1B_1$ и $\rho_2 : A_1B_1 \to A_2B_2$.

Користимо и ознаку $\overline{XY}$ за дужину дужи XY, за разлику од орјентисане дужине коју означавамо $\overrightarrow{XY}$, или $\vec{v}$, односно $\mathbf{v}$ и називамо *вектор.* Тада је $\overrightarrow{YX}$, или $-\vec{v}$, односно $-\mathbf{v}$ вектор супротне орјентације.

Задатак 4.2.19. *Показати да за фигуре са слике 4.12 важи:*
i. $AB \| A_1B_1 \| A_2B_2$, $\overline{AB} = \overline{AB}$;
ii. $\overline{AA_2} = \overline{BB_2} = 2 \cdot \overline{O_1O_2}$;

Приметимо да су две наспрамне странице AA_2 и BB_2 паралелограма AA_2B_2B паралелне, једнаких дужина и једнако орјентисане. Зато кажемо да оне чине исти вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{BB_2}$. Другим речима, два вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AA_2}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BB_2}$ су једнака акко су дужи AA_2 и BB_2 паралелне, исте дужине и исте орјентације. Тада пишемо $\vec{a} = \vec{b}$ а тај вектор називамо вектором транслације. Вектор транслације једнак је двоструком вектору $\overrightarrow{O_1O_2}$.

Задатак 4.2.20. *Нека је транслација* $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ *дефинисана двема централним симетријама у редоследу као на слици 4.12, а транслација* $\vec{v}' = 2 \cdot \overrightarrow{O_2O_1}$ *обрнутим. Ако је* $\vec{v} : A \to A_2$ *и* $\vec{v}' : A \to A_2'$ *показати да су дужи* AA_2 *и* AA_2' *паралелне, једнаких дужина и супротне орјентације.*

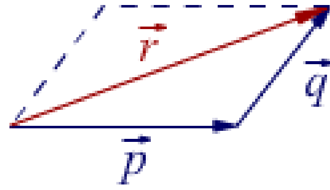
Према томе, за композицију централних симетрија можемо писати

$$\rho_2 \circ \rho_1 = -\rho_1 \circ \rho_2 \iff \rho_2 \circ \rho_1 + \rho_1 \circ \rho_2 = 0. \tag{4.8}$$

Идентичку трансформацију, када је копија је идентична оригиналу, називамо нултом транслацијом и означавамо нултим вектором $\vec{0}$ или једноставно нулом 0. За векторе транслације из задатка 4.2.20 можемо писати $\vec{v}' = -\vec{v}$, односно $\vec{v}' + \vec{v} = 0$.

Задатак 4.2.21. *Дата су два подударна троугла паралелних одговарајућих страница. Нађи све парове централних симетрија чија композиција пресликава један у други.*

У следећем задатку се доказује да је збир вектора транслације $\vec{r} = \vec{p}+\vec{q}$ дијагонала паралелограма разапетог датим сабирцима, као на слици 4.13.

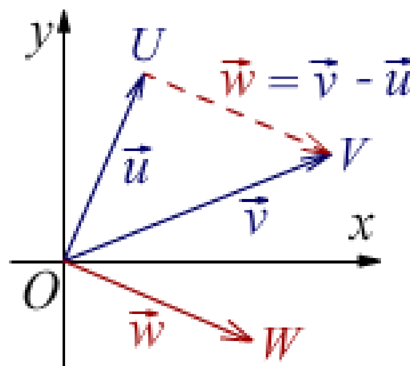


Slika 4.13: Паралелограм збира вектора $\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$.

Задатак 4.2.22. *Показати да се композиција две транслације, дефинисане са по два пара симетрија са центрима P_1, P_2 и Q_1, Q_2, може представити једном транслацијом, дефинисаном једним паром центара R_1 и R_2, таквом да је орјентисана дуж R_1R_2 паралелна, једнаке дужине и смера једнаких дијагонали паралелограма који се може формирати орјентисаним дужима P_1P_2 и Q_1Q_2.*

То што су орјентисане дужи $\overrightarrow{AA_2}$ и $\overrightarrow{BB_2}$ при транслацији са слике 4.12 једнаке значи да векторе који имају исти правац, смер и интензитет (дужину) не разликујемо. Зато подразумевамо да у Декартовој равни Oxy свакој тачки A одговара вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Ако тачка A има координате (a_x, a_y) онда кратко пишемо да имамо вектор $\vec{v} = (a_x, a_y)$, или само $\vec{a}(a_x, a_y)$, подразумевајући да је почетак тог вектора исходишна тачка O, а врх дата тачка.

Примјер 4.2.23. *У Декартовом правоуглом систему Oxy су дате тачке U и V. Представити вектор $\overrightarrow{UV}$.*



Slika 4.14: Вектор између две тачке $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$.

Рјешење. Са две дате тачке $U(u_x, u_y)$ и $V(v_x, v_y)$ подразумевамо векторе $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, као на слици 4.14. Како за збир вектора важи $\vec{u} + \overrightarrow{UV} = \vec{v}$, то је $\overrightarrow{UV} = \vec{v} - \vec{u}$.

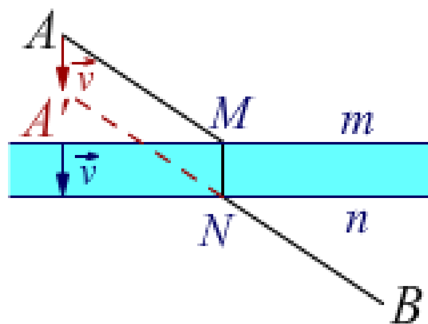
Затим тражимо тачку W такву да је дуж OW паралелна, једнаке дужине и усмерења као вектор $\overrightarrow{UV}$ и проглашавамо је вектором $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$. Одузимањем добијамо и координате тачке $W(v_x - u_x, v_y - u_y)$. □

Слике 4.13 и 4.14 представљају правила за сабирање и одузимање вектора, која су нам иначе позната из других области математике и примена. Оно што је овдје наглашено је употреба тих истих вектора за дефинисање транслације, али и за разумевање транслације помоћу композиције централних симетрија.

Задатак 4.2.24. *Дат је троугао са теменима* $A(2,-1)$, $B(3,2)$ *и* $C(-1,0)$.
i. Транслирати га за вектор $\vec{v} = (2,1)$.
ii. Који вектор га транслира у троугао: $A(-1,4)$, $B(0,7)$ *и* $C(-4,5)$.

Укратко, транслација је померање тачке X у X' за вектор $\vec{v} = \overrightarrow{XX'}$. Дакле, почетак вектора је оригинал а врх њена копија. То је општа особина транслације, независно од избора система координата.

Примјер 4.2.25. *Између места* A *и* B *налази се канал. гдје треба поставити мост преко канала па да пут од* A *до* B *буде најкраћи?*



Slika 4.15: Најкраћи пут од A до B преко моста MN.

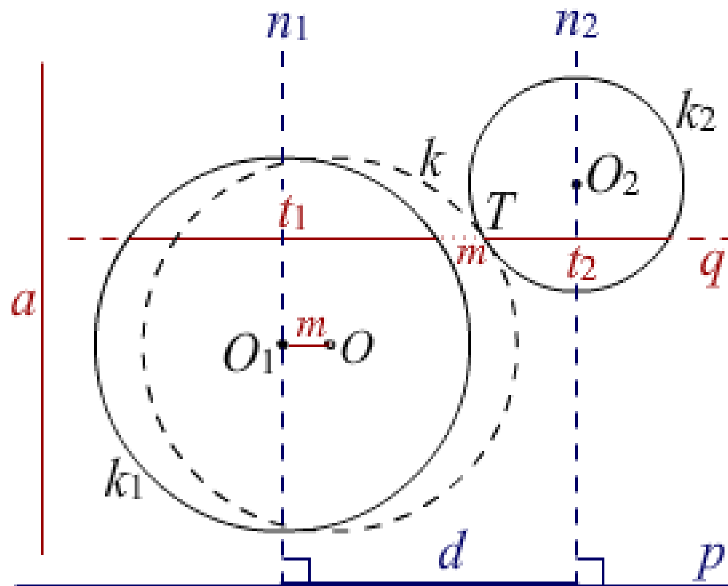
Рјешење. Обале канала су линије m и n, а ширина канала дефинише вектор $\vec{v}$, као на слици 4.15. Транслирамо тачку A за вектор $\vec{v}$ у тачку A' и повучемо праву $A'B$. Пресек праве са обалом је место за мост.

Прецизније, мост представља дуж MN, гдје је $M \in m$ тачка ближа A, а $N \in n$ је тачка ближа B. Транслација $\tau(\vec{v}) : A \to A'$ одређује тачку A', пресек $A'B \cap n = N$ дефинише место N моста на обали n. Инверзна транслација $\tau(-\vec{v}) : N \to M$, транслација за вектор $-\vec{v}$, одредиће тачку M на обали m.

Пут $AM + MN + NB$ је најкраћи, јер је пут $AA' + A'B$ најкраћи. □

Задатак 4.2.26. *У дати троугао* ABC *„уписати“ дуж једнаку и паралелну датој дужи* d.

Примјер 4.2.27. *Дата су два круга* k_1 *и* k_2*, права* p *и дуж дужине* a*. Конструисати праву* q *паралелну* p *која у датим круговима одсеца тетиве збирне дужине* a*.*



Slika 4.16: Конструкција паралелних тетива за збирном дужином.

Рјешење. Конструишемо две нормале n_1 и n_2 кроз центре O_1 и O_2 датих кругова k_1 и k_2 на дату праву p, као на слици 4.16. Нека је d растојање између нормала. Конструишемо дужину $m = d - \frac{1}{2}a$, износ шупљине између два круга дуж тражене линије q. Транслирамо круг $k_1(O_1, r_1)$ у круг $k(O, r_1)$ паралелно p у правцу $k_2(O_2, r_2)$ за дужину m. Једна од тачака пресека кружница k и k_2 је T. Кроз тачку T конструишемо праву q паралелну са правом p.

Заиста, нека су дужине тетива у кружницама t_1 и t_2 редом. Тада је:

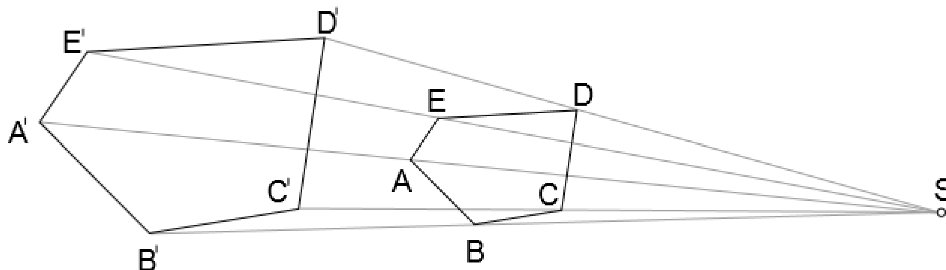
$$\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 = d - m = d - (d - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{2}a,$$

што значи $t_1 + t_2 = a$. □

Задатак 4.2.28. *У четвороугао* $PQRS$ *су уписана два паралелограма* $ABCD$ *и* $A_1B_1C_1D_1$ *са одговарајућим узајамно паралелним страницама, да* $A, A_1 \in PQ$*,* $B, B_1 \in QR$ *и тако даље. Доказати да су дијагонале четвороугла паралелне одговарајућим страницама паралелограма.*

4.3 Хомотетија

Хомотетија је пресликавање тачака задато тачком S коју називамо „средиштем хомотетије“ и константним бројем λ који називамо „константом хомотетије“, тачке X у тачку X' тако да је $S - X - X'$ и $\overline{SX'} = \lambda \cdot \overline{SX}$.



Slika 4.17: Пресликавање хомотетијом из центра S.

У следећем примјеру векторима доказујемо Талесову теорему о сличности (уз слику 3.13).

Примјер 4.3.1. *Када имамо колинеарне тачке $S - A - A'$ и $S - B - B'$, као на слици 4.17, при чему важи пропорција $\overline{SA'} : \overline{SA} = \overline{SB'} : \overline{SB}$, тада су дужи $A'B'$ и AB паралелне и важи пропорција $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'S} : \overline{AS}$.*

Рјешење. Из датих услова следе векторске једнакости $\overrightarrow{SA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SB}$, гдје је $\lambda = \overline{SA'} : \overline{SA}$. Даље добијамо:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SB} - \lambda \cdot \overrightarrow{SA}$$
$$= \lambda(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Према томе је $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \lambda$. □

У следећем задатку треба аналогно доказати обрат претходног тврђења, дакле обрат Талесове теореме сличности. Затим следи још неколико занимљивих општих особина хомотетија.

Задатак 4.3.2. *Када имамо колинеарне тачке $S - A - A'$ и $S - B - B'$, као на слици 4.17, при чему су дужи $A'B'$ и AB паралелне у односу $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \lambda$, доказати да тада важе пропорције $SA' : SA = SB' : SB = \lambda$.*

Задатак 4.3.3. *Пресликавање f има следеће особине: ако су A' и B' слике тачка A и B, тада је $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, гдје је $\lambda \in \mathbb{R}$ нека константа. Доказати:*

i. ако је $\lambda = 1$, тада је f транслација[9];

ii. ако је $\lambda \neq 1$, тада је f хомотетија.

[9] подразумева се паралелна транслација

Задатак 4.3.4. *Доказати да је композиција две хомотетије са коефицијентима* λ_1 *и* λ_2*, гдје* $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$*, хомотетија са коефицијентом* $\lambda_1\lambda_2$ *и да њен центар припада дужи која спаја центре датих хомотетија. Истражити случај* $\lambda_1\lambda_2 = 1$*.*

Примену композиције хомотетија можете видети у задацима 4.3.17 и 4.3.18. Пре тога, видећемо хомотетије у четири примјера типичних конструктивних задатака, а затим у доказима неких ставова о полигонима и круговима.

Задатак 4.3.5. *У дати оштроугли троугао* ABC *upisati kvadrat* $PQRS$*, тако да темена* P *и* Q *леже на страници* AB*, затим* $R \in BC$*,* $S \in CA$*.*

Задатак 4.3.6. *Конструисати квадрат* $ABCD$ *ако је дата удаљеност* d *темена* A *od sredine* $S \in CD$ *наспрамне странице.*

Задатак 4.3.7. *Дат је угао* $\angle bAc$ *и у њему тачка* M*. Конструисати кружницу* k *која додирује краке* b, c *угла и садржи тачку* M*.*

Задатак 4.3.8. *Уписати два једнака круга* k_2, k_2 *у дати троугао* ABC *тако да се кругови додирују и да сваки од њих додирује по две странице троугла.*

Задатак 4.3.9. *Доказати тврђења:*

i. Средине страница произвољног четвороугла су темена паралелограма.

ii. Када се секу, дијагонале растављају четвороугао на четири троугла чија тежишта су темена паралелограма.

Задатак 4.3.10. *Дат је трапез*[10] $ABCD$*, са паралелним основицама* AB, CD *чије средине су редом* M, N*. Краци* BC *и* AD *секу се у тачки* K*, а дијагонале* AC *и* BD *у тачки* L*.*

i. Доказати да су тачке M, N, K, L *колинеарне*[11]*.*

ii. Ако је пресек дијагонала и трапеза једнако удаљен од кракова BC *и* AD*, тада је трапез једнакокрак.*

Задатак 4.3.11. *Тежишнице* AA_1, BB_1, CC_1 *троугла* ABC *секу се у тежишту, тачки* T*. Нека је* P *произвољна тачка. Права линија* ℓ_A *садржи тачку* A *и паралелна је правој* PA_1*. Линије* ℓ_B, ℓ_C *су дефинисане слично. Доказати:*

i. Праве $\ell_A, \ell_B, \ell_C 4$ *секу се у тачки* Q*;*

ii. Тачка T *припада дужи* PQ *и* $\overline{PT} : \overline{TQ} = 1 : 2$*.*

Задатак 4.3.12. *Кружница* $k(O, r)$ *тангира краке* AB *и* AC *једнакокраког троугла* ABC *у тачкама* P *и* Q *редом и такође изнутра тангира описану кружницу* $k_o(O_o, r_o)$ *тог троугла. Доказати да је средина* S *дужи* PQ *центар уписане кружнице* $k_u(O_u, r_u)$ *датог троугла.*

Задатак 4.3.13. *Дата је кружница на којој се налазе две фиксне тачке* A, B *и трећа променљива тачка* C*. Наћи геометријско место*[12] *тежишта троугла* ABC*.*

[10] Трапез је четвороугао са једним паром паралелних страна.

[11] Колинеарне су тачке на истој правој.

[12] Геометријско место тачака је скуп свих тачака које задовољавају дату особину.

Задатак 4.3.14. *Две фиксне кружнице k_1 и k_2 различитих полупречника се додирују извана у тачки C. Избор тачака $A \in k_1$ и $B \in k_2$ се мења, али тако да је троугао ABC увек правоугли, са правим углом у темену C. Из темена C на хипотенузу је повучена висина CD, $D \in AB$. Наћи геометријско место тачака D.*

Задатак 4.3.15. *i. Круг уписан у троугао ABC тангира страницу AC у тачки D, крајњој тачки пречника DE. Права BE сече страницу AC у тачки F. Доказати $AF = DC$.*

ii. У кругу су два окомита пречника AB и CD. Из тачке P изван круга повучене су тангенте на круг које секу праву AB редом у тачкама E, H и праве PC, PD које секу AB у тачкама F, K редом. Доказати $EF = KH$.

Задатак 4.3.16. *Кржница k са центром O је уписана у троугао ABC. Она додирује станицу AC у тачки D. Средина странице AC је тачка B_1. Доказати да права B_1O полови дуж BD.*

Задатак 4.3.17. *Доказати да се спољашње тангенте парова три круга k_1, k_2, k_3 секу у колинеарним тачкама.*

Задатак 4.3.18. *Трапези $ABCD$ и $APQD$ имају заједничку основицу AD. Проверити да су пресечне тачке парова следећих линија колинеарне:*

i. AB и CD, AP и DQ, BP и CQ;

ii. AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

Ротациона хомотетија, или спирална сличност, је композиција хомотетије и ротације са заједничким центром. Када је $\mathcal{H}_O$ хомотетија са центром O, а $\rho(O,\omega)$ ротација око истог центра за угао ω, тада је:

$$\mathcal{R}(O,\omega) = \rho(O,\omega) \circ \mathcal{H}_O = \mathcal{H}_O \circ \rho(O,\omega) \tag{4.9}$$

ротациона хомотетија, коју означавамо и са $\mathcal{R}_O^\omega$.

Задатак 4.3.19. *Две кружнице k_1 и k_2 се секу у две тачке A и B. Праве линије p и q пролазе тачком A и секу прву кружницу у тачкама P_1, Q_1, а другу кружницу у тачкама P_2, Q_2. Доказати да је угао између линија P_1Q_1 и P_2Q_2 једнак углу између кружница*[13].

Задатак 4.3.20. *Кружнице k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Ротациона хомотетија $\mathcal{R}(A,\omega)$, са центром A за угао ω, пресликава k_1 у k_2 и тачку $P_1 \in k_1$ у $P_2 \in k_2$. Доказати да права P_1P_2 пролази кроз B.*

Пресликавање сличности је композиција хомотетија са изометријама. Другим речима, то је пресликавање тачака равни у ту исту раван којим се темена троугла ΔABC пресликавју у темена троугла $\Delta A'B'C'$ тако да одговарајући углови тих троуглова остају непромењени.

[13] Угао између кривих је угао између тангенти на њих у заједничкој тачки.

За два троугла[14] кажемо да су слични и пишемо $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ акко за њих важи бар један од критеријума:

SSS: важе пропорције $a : a' = b : b' = c : c'$;

SUS: важи пропорција $a : a' = b : b'$ и једнакост $\gamma = \gamma'$;

UU: било која два од углова α, β, γ су једнака одговарајућим α', β', γ'.
Када важи један од тих критеријума, тада важе сва три. То је последица Талесове теореме о сличности, објашњена уз слику 3.13.

Приметимо да композиција од највише по једне рефлексије, ротације и транслације на јединствен начин дефинише изометрију и да исто важи и за сличност.

Примјер 4.3.21. *Показати да постоји јединствена трансформација сличности која копира дати троугао ΔABC у дати њему сличан троугао $\Delta A'B'C'$.*

Рјешење. Ако су дати троуглови подударни, јединствена сличност је јединствена изометрија. Ако троуглови нису подударни, нека тачка O је центар хомотетије која пресликава ΔABC у $\Delta A''B''C''$ подударан са $\Delta A'B'C'$, а затим постоји и изометрија која пресликава $\Delta A''B''C''$ у $\Delta A'B'C'$. □

Када имамо два слична троугла, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, тада постоји јединствен број $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1\}$ такав да је $XY : X'Y' = \lambda$ не само за $X, Y \in \{A, B, C\}$, него за било који пар тачака дате равни. Када је параметар $|\lambda| < 1$ трансформација је *контракцији* равни, када је $|\lambda| > 1$ говоримо о *дилатацији*. Позитивно ламбда значи директну трансформацију, а негативно рефлексију, са обртањем орјентације троугла.

Трансформација сличности је пресликавање $\mathcal{S}_\lambda : \pi \to \pi$ произвољних тачака дате равни у исту раван. То можемо писати и на следеће начине:

$$\mathcal{S}_\lambda : X \to X', \quad \mathcal{S}\lambda : XY \to X'Y', \quad \mathcal{S}_\lambda : \Delta ABC \to \Delta A'B'C',$$

гдје је дужина $X'Y' = \lambda \cdot XY$, или као функцију $\mathcal{S}_\lambda(X) = X'$.

Претходни примјер указује на егзистенцију јединствене инверзије трансформације сличности. Инверзијом $\mathcal{S}_\lambda^{-1} = \mathcal{S}_{1/\lambda}$ контракција прелази у дилетацију и обрнуто. Зато је следећу теорему лако проширити на сваку трансформацију сличности.

Теорема 4.3.22. *Директна контракција има само једну непокретну тачку.*

Рјешење. Нека је $0 < \lambda < 1$ и X_0 произвољна тачка. Конструишемо низ тачака:

$$X_1 = \mathcal{S}_\lambda(X_0), \quad X_2 = \mathcal{S}_\lambda(X_1), \quad X_3 = \mathcal{S}_\lambda(X_2), \quad ... \tag{4.10}$$

За удаљености између узастопних чланова низа важе једнакости

$$X_n X_{n+1} = \lambda \cdot X_{n-1} X_n = \dots = \lambda^n \cdot X_0 X_1 = \lambda^n a,$$

[14] Подразумеване ознаке за троугао ΔABC су странице $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$, затим углови $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ и $\gamma = \angle BCA$

гдје је a удаљеност између прве две тачке низа. Растојање постаје нула када $n \in \mathbb{N}$ неограничено расте. Отуда, за удаљеност између две произвољне тачке истог низа (4.10), за $m \in \mathbb{N}$, важе неједнакости:

$$X_m X_{m+n} \le X_m X_{m+1} + X_{m+1} X_{m+2} + \dots + X_{m+n-1} X_{m+n}$$

$$\le a\lambda^m + a\lambda^{m+1} + \dots + a\lambda^{m+n} = a\lambda^m (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n).$$

Међутим, из:

$$L_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n$$

$$\lambda L_n = \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \lambda^{n+1}$$

одузимањем добијамо $L_n - \lambda L_n = 1 - \lambda^{n+1}$, а отуда $L_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, односно

$$X_m X_{m+n} \le a\lambda^m \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \le \frac{a\lambda^m}{1-\lambda}.$$

Ово растојање такође постаје нула када m неограничено расте. Дакле, тачка X_n на крају низа (4.10) постаје непокретна тачка X' пресликавања.

Тиме је доказана егзистенција непокретне тачке пресликавања $\mathcal{S}_\lambda$, а остаје да проверимо да је она и једина. Претпоставимо да пресликавање поред X' има још једну непокретну тачку $X'' \ne X'$. Тада је растојање

$$X'X'' = \mathcal{S}_\lambda(X')\mathcal{S}_\lambda(X'') \le \lambda \cdot X'X'',$$

што је у контрадикцији са полазном претпоставком $0 < \lambda < 1$. □

Ово је био познати Банахов[15] став о непокретној тачки. Исти се лако поопштава на контракције са рефлексијом (за $-1 < \lambda < 0$). Проширење Банаховог става на дилатације (за $|\lambda| > 1$) докази због једнозначности пресликавања $\mathcal{S}_\lambda$, које због тога има инверзну функцију а која је онда контракција. Међутим, непокретна тачка контракције је непокретна и за њену инверзију.

[15] Stefan Banah (1892-1945), пољски математичар.

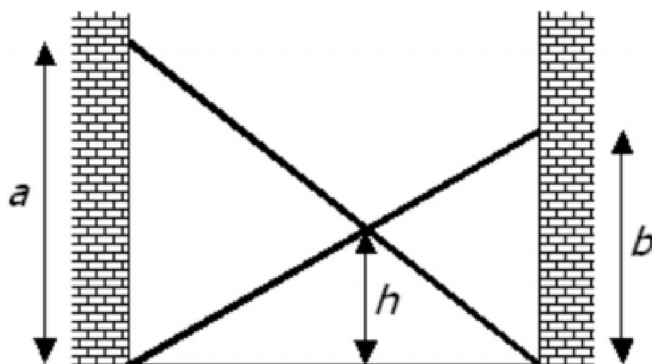
4.4 Фигуре

Фигуром у геометрији називамо било какав непразан скуп тачака. Фигуре су тачке, линије, делови равни. Посебно, то су затворене фигуре попут: троуглова, четвороуглова, многоуглова, кругова.

Трапез је четвороугао са једним паром паралелних страна. Паралелне стране се називају основице, а непаралелне краци трапеза. Правоугли трапез је онај чији један крак је окомит на (обе) основице. Једнакокраки трапез је онај чији су краци једнаке дужине.

Примјер 4.4.1. *Мердевине су постављене између два зида у облику основица правоуглог трапеза, као на слици 4.18. Доказати да је*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}.$$



Slika 4.18: Мердевине постављене између два зида.

Рјешење. Означимо са x, y редом удаљености крижања мердевина до левог и десног зида висина a и b. Из сличних троуглова следи:

$$(x+y):a=y:h,\quad (x+y):b=x:h,$$
$$\frac{x+y}{a}+\frac{x+y}{b}=\frac{x+y}{h},$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h},$$

што је и требало доказати. □

Тангенте кружнице формирају *тангентни четвороугао.* Тангентни четвороугао[16] је онај у који се може уписати круг. Тетиве кружнице формирају *тетивни четвороугао.* Тетивни је четвороугао око кога се може описати кружница.

[16] в. задатак 3.2.21-i.

Примјер 4.4.2. *Тетивни трапез има следеће две особине:*

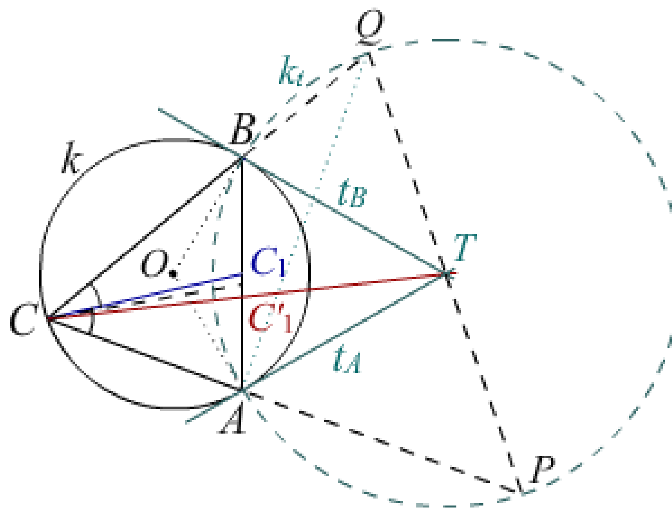
i. он је једнакокрак; *ii. дијагонале су му једнаке дужине.*

За једнакокраки тангентни трапез важи:

iii. висина на основицу је геометријска средина основица.

Примјер 4.4.3. *Круг k полупречника r уписан је у троугао ABC. Конструисане су паралеле са страницама троугла које тангирају круг и оне на датом троуглу одсецају три мала троугла. Нека су r_1, r_2 и r_3 полупречници уписаних кружница у те мале троуглове. Показати да је $r_1 + r_2 + r_3 = r$.*

Медијана или тежишница је дуж која спаја врх са средином супротне странице троугла, а *симедијана* је рефлексија медијане преко симетрале угла. На слици 4.19 троугла ABC медијана је CC', симетрала $\angle C$ је испрекидана линија, а симедијана је $C - C_1' - T$, док су t_A и t_B тангенте на описану кружницу у тачкама A и B.



Slika 4.19: Симедијана CC_1' и медијана CC_1 троугла ABC.

Примјер 4.4.4. *Доказати да се тангенте t_A и t_B на слици 4.19 секу у тачки T која лежи на симедијани из темена C троугла ABC.*

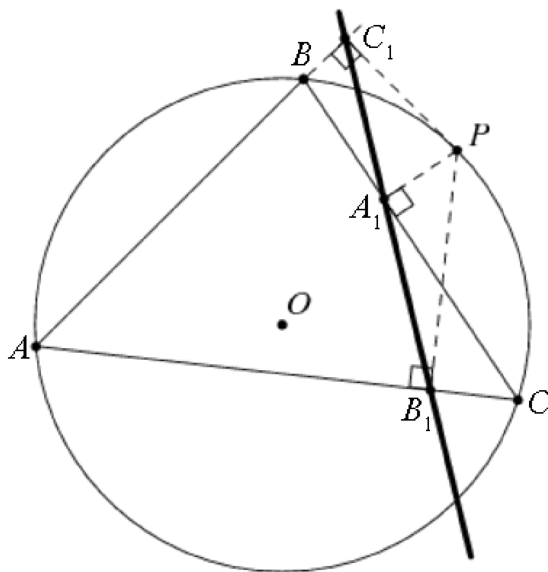
Рјешење. Означимо са $k(O, r)$, гдје је $r = OA = OB = OC$, описану кружницу троугла ABC, а са $k_t(T, r_t)$ кружницу са центром T и полупречником $r_t = AT = BT$ која која садржи тачке A и B. Нека продужеци страница CA и CB секу кружницу k_t редом у тачкама P и Q. Четвороугао $APQB$ је тетиван, па је $\angle BAC = \angle BQP$, а отуда $\Delta CAB \sim \Delta CQP$. Даље ћемо доказати да за ова два троугла важи композиција хомотетије и рефлексије.

За вањски угао троугла CAQ важи

$$\angle PAQ = \angle AQB + \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle ATB + \angle AOB) = 90°,$$

па је PQ пречник круга k_t, тј. $T \in PQ$. Средине страница PQ и AB су редом тачке T и C_1, па је $\angle ACT = \angle QCC_1$ одакле следи тражени резултат. □

Педални троугао чине темена A_1, B_1, C_1 која су подножја нормала $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp AC$, $PC_1 \perp AB$ на странице датог троугла ABC из дате тачке P. Посебан случај педалног троугла је ортички, који чине подножја нормала из ортоцентра H (и из темена) датог троугла. Када је тачка P на описаној кружници троугла ABC онда су тачке A_1, B_1, C_1 на правој која се назива *Симсонова*[17].



Slika 4.20: Симсонова права садржи подножја A_1, B_1C_1.

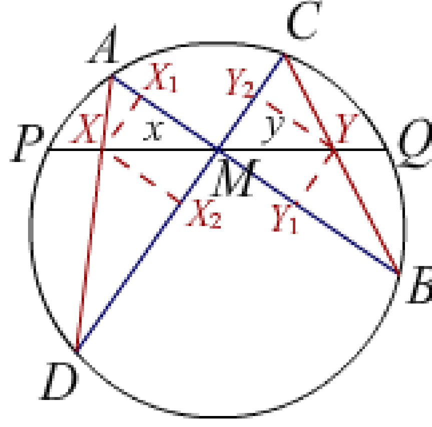
Теорема 4.4.5 (Симсонова). *Тачке A_1, B_1, C_1 су колинеарне акко P лежи на кружници описаној око троугла ABC.*

Доказ. Користимо слику 4.20. Периферни углови над истом тетивом, као и углови са окомитим крацима, су једнаки (или суплементни), па је $\angle APC = \angle B = \angle A_1PC_1$. Одузимајући $\angle APA_1$ добијамо $\angle A_1PC = \angle APC_1$. Четвороугао PA_1CB_1 је такође тетиван, па је $\angle A_1PC = \angle A_1B_1C$. Тетиван је и четвороугао PC_1AB_1 па је зато $\angle APC_1 = \angle AB_1C_1$. Отуда $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, што значи да су тачке A_1, B_1, C_1 колинеарне. Када P није на кружници, не важи прва једнакост, нити остале. □

Овај теорем се назива и Валисов[18], по математичару који га је поопштавао. Према неким историјским изворима, Валис је већ 1802. године помињао следећу, теорему Лептира (енг. Butterfly theorem), чије откриће се данас углавноп приписује Хорнеру[19] 1815. године.

[17] Robert Simson (1687-1768), шкотски математичар.
[18] William Wallace (1768-1843), шкотски математичар.
[19] William George Horner (1786-1837), британски математичар.

Теорема 4.4.6 (Лептир). *Кроз средњу тачку M тетиве PQ круга, повучене су произвољне две тетиве AB и CD које секу PQ у тачкама X и Y редом. Тада је M средина дужи XY.*



Slika 4.21: Теорема лептира.

Доказ. На слици 4.21 лево, из тачака X и Y спуштене су окомице на тетиве $X_1, Y_1 \in AB$ и $X_2, Y_2 \in CD$. Посматрајмо парове сличних троуглова:

$$\begin{cases} \Delta MX_1X \sim \Delta MY_1Y, & \Delta MX_2X \sim \Delta MY_2Y, \\ \Delta AX_1X \sim \Delta CY_2Y, & \Delta DX_2X \sim \Delta BY_1Y. \end{cases}$$

Означимо дужине $PM = MQ = a$, $XM = x$, $MY = y$, затим $XX_i = x_i$, $YY_i = y_i$ за оба индекса $i = 1, 2$. Тада важе пропорције:

$$\begin{cases} x : y = x_1 : y_1, & x : y = x_2 : y_2, \\ x_1 : y_2 = AX : CY, & x_2 : y_1 = XD : YB. \end{cases}$$

Отуда (в. задатак 3.3.17):

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} = \frac{AX}{CY} \cdot \frac{XD}{YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ}$$

$$= \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

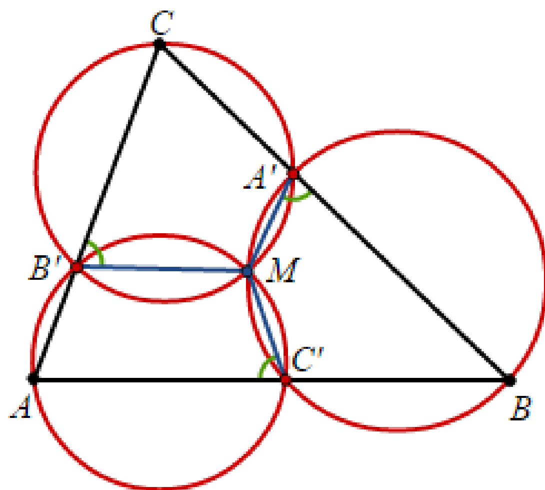
те $x = y$, као што је требало доказати. □

Мигелова[20] тачка M, на слици 4.22, је пресек три кружнице које садрже свака по једно теме троугла ABC и по две суседне од три дате тачке A', B' и C' на његовим

[20]Auguste Miquel (1816-1851), француски математичар.

страницама BC, CA и AB редом. Три угла $\angle MA'B$, $\angle MB'C$ и $\angle MC'A$ су једнака (на слици[21] зелено).

Доказ се заснива на особини тетивних четвороуглова, овдје $AC'MB'$, $BA'MC'$ и $CB'MA'$, да су им наспрамни углови суплементни. У темену M збир унутрашњих углова тих четвороуглова је једнак збиру суплементних углова датог троугла, а то је пуни угао, јер $(180° - \angle A) + (180° - \angle B) + (180° - \angle C) = 360°$. Тиме је доказана следећа теорема.



Slika 4.22: Мигелова тачка.

Теорема 4.4.7 (Мигелова). *На свакој од три странице троугла ABC дата је тачка $A' \in BC$, $B' \in CA$ и $C' \in AB$.*

i. Темена троугла са по две суседне од тих тачака дефинишу три кружнице са заједничком тачком M.

ii. $\angle MA'B = \angle MB'C = \angle MC'A$.

Хармонијска средина два броја $a + b \neq 0$ је количник $H(a, b) = 2ab/(a + b)$, в. (2.14). Пола тог броја смо већ имали у првом примјеру 4.4.1, а још неке геометријске случајеве хармонијске средине ћемо видети у наставку.

Задатак 4.4.8. *Дат је трапез са основицама $AB = a$, $CD = b$ и дијагоналама AC, BD које се секу у тачки P. Кроз тачку P повучена је дуж MN паралелна основицама $M \in AD$, $N \in BC$. Изразити дужине MP, PN и MN помоћу a и b.*

Задатак 4.4.9. *У троугао ABC страница $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ уписан је ромб[22] $DEAF$ са теменима $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$. Доказати да је страница ромба дужине*

$$p = \frac{ab}{a + b}, \tag{4.11}$$

[21]Wikipedia: `https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel%27s_theorem`

[22]Ромб је паралелограм са све четири странице једнаке дужине.

односно $p = H(a,b)/2$.

Блиска овом су следећа два тврђења. Друго, да симетрала угла троугла дијели наспрамну страницу пропорционално крацима угла, смо већ доказивали помоћу површина у теореми 3.2.16.

Задатак 4.4.10. *У троуглу* ABC *дата је тачка* $B' \in AC$. *Конструишемо паралелу* $B'D \| AB$, $D \in BC$, *затим паралелу* $DC' \| AC$, $C' \in AB$. *Доказати:*

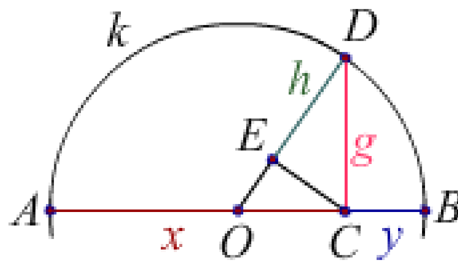
i. четвороугао $AB'DC'$ *је ромб;*

ii. $DC : DB = AC : AB$.

Задатак 4.4.11. *Дате су дужи* a, b. *Конструисати аритметичку, геометријску и хармонијску средину:*

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}.$$

На слици 4.23 је приказана кружница $k(O,r)$ са центром O и пречником $AB = 2r$. Означене су дужине $AC = x$, $CB = y$, $CD = g$, $ED = h$. При томе је $CD \perp AB$, затим $O - E - D$ и $CE \perp OD$.



Slika 4.23: Аритметичка, геометријска и хармонијска средина.

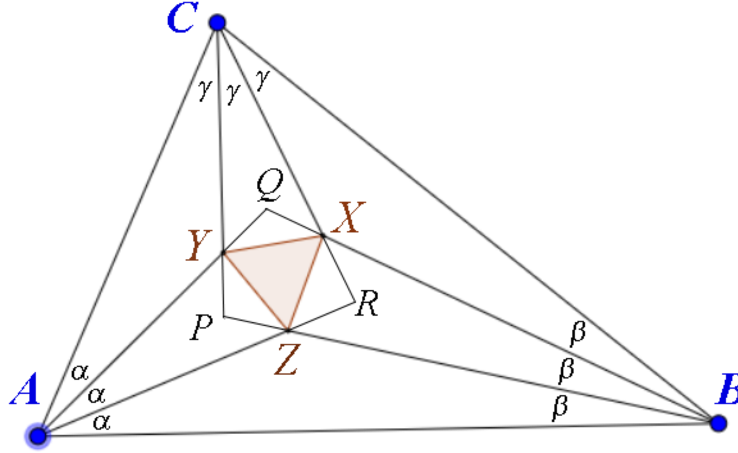
Задатак 4.4.12. *Показати да су на слици 4.23 све три средине дужина* x *и* y*:*

$$AO = \frac{x+y}{2}, \quad CD = \sqrt{xy}, \quad ED = \frac{2xy}{x+y}$$

аритметичка, геометријска и хармонијска, редом.

Једно од најнеобичнијих новијих открића у области елементарне геометрије је *Морлијева*[23] теорема о трисекцијама из 1899. године. Међутим, без обзира на сву једноставност и лепоту Морлијевог тврђења, до сада откривени докази[24] нису такви, због чега је његова теорема ретко позната.

Теорема 4.4.13 (Морли)**.** *Када се сваки угао у теменима троугла* ABC *подели на три дела, краци подела се секу у теменима једнакостраничног троугла* XYZ.



Slika 4.24: Морлијева теорема.

Доказ. Нека су углови у теменима троугла ABC редом $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$, као на слици 4.24. Тада је збир $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Доказ ћемо даље водити обрнутим путем[25], тражећи троугао ($\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$) са поменутим угловима, а полазећи од произвољног ΔXYZ који је једнакостраничан.

Нека су P, Q, R тачке на продужецима висина из темена ΔXYZ такве да је:

$$\angle XPY = \alpha + 30^\circ, \quad \angle YQZ = \beta + 30^\circ, \quad \angle ZRX = \angle ZRY = \gamma + 30^\circ.$$

При томе $\angle XPZ = \angle XPY$, $\angle YQX = \angle YQZ$ и $\angle ZRY = \angle ZRX$. У четвороуглу, рецимо $XRA'Q$, је збир углова 360°, па добијамо:

$$\angle ZA'Y = \alpha, \quad \angle XB'Z = \beta, \quad \angle YC'X = \gamma.$$

Конструишимо кружницу са центром у X која додирује праву PB', па према томе и праву PC' (јер је PX симетрала $\angle BPC'$). Повуцимо тангенте $B'T$ и $C'U$ које се секу у тачки V. Тада је:

$$\angle XB'T = \angle XB'Z = \beta, \quad \angle XC'U = \angle XC'Y = \gamma.$$

Дакле, збир углова P, B', C' четвороугла $PB'VC'$ је

$$2\alpha + 60^\circ + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ,$$

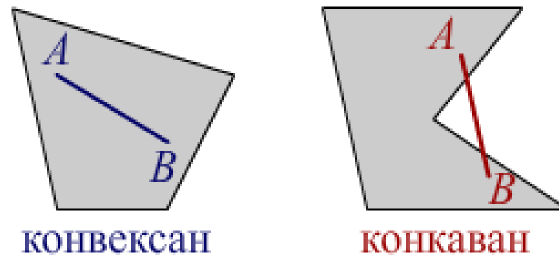
што значи да је $\angle B'VC' = 180^\circ$, односно да се тачке T, V, U поклапају.

Према томе $\angle XB'C' = \beta$ и $\angle XC'B' = \gamma$, чиме су углови $\Delta XB'C'$ одређени. Слично, помоћу кругова са центром у Y и Z, одређујемо углове $\Delta YC'A'$ и $\Delta ZA'B'$.

[23] Frank Morley (1860-1937), англо-амерички математичар.
[24] Morley's Miracle: `http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/`
[25] by Brian Stonebridge, University of Bristol.

Тиме је показано да добијени троугао $\Delta A'B'C'$ има исте углове као и дати ΔABC и да трисекција његових углова даје једнакостраничан ΔXYZ. Отуда, исто важи и за оригинални троугао ΔABC. □

Користећи особине медијана[26] лако је доказати[27] следећа тврђења која је 1731. године откриоВаригнон[28]. Пре тога, подсетимо се да је фигура *конвексна* ако садржи сваку дуж када садржи њене крајње тачке, за разлику од *конкавне* фигуре, као на слици 4.25.



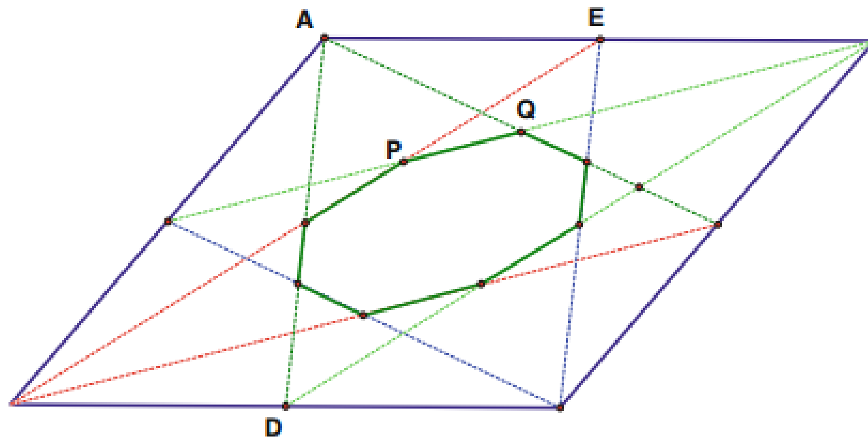
Slika 4.25: Конвексан и конкаван полигон.

Задатак 4.4.14. *Доказати да за произвољан конвексан четвороугао важи.*

i. Средине страница четвороугла су темена паралелограма.

ii. Површина паралелограма је половина површине датог четвороугла.

iii. Обим паралелограма једнак је збиру дијагонала датог четвороугла.



Slika 4.26: Проблем Лидски.

[26]в. задатак 3.3.9

[27]в. задатак 4.3.9

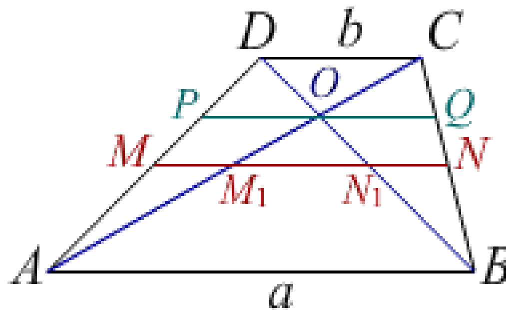
[28]Pierre Varignon (1654-1722), француски математичар.

Задатак 4.4.15 (Лидски)**.** *Дат је паралелограм површине μ, као на слици 4.26. Његови врхови су спојени са срединама супротних страница. Доказати да је површина полигона унутар тих спојница једнака шестини површине датог паралелограма.*

Задатак 4.4.16. *Површине круга и квадрата су једнаке. Доказати да је однос њихових обима $\sqrt{\pi} : 2 \approx 10 : 11$.*

Задатак 4.4.17. *Дат је квадрат странице дужине а. Средине његових страница чине нови квадрат, а средине новог опет нови квадрат. Тај процес се наставља без прекида. Колики је збир обима свих таквих квадрата?*

На слици 4.27 приказан је произвољан трапез ABC, са основицама $AB = a$, $CD = b$ и дијагоналама AC и BD које се секу у тачки O. Тачке $M \in AD$ и $N \in BC$ су средине кракова, којима припадају и крајеви дужи $PQ \| AB \| DC$, али такве да је $P - O - Q$. Пресеци средње линије и дијагонала су $MN \cap AC = M_1$ и $MN \cap BD = N_1$.



Slika 4.27: Трапез.

Задатак 4.4.18. *За трапез на слици 4.27 доказати следеће једнакости:*

$$MN = \frac{a+b}{2}, \quad M_1N_1 = \frac{|a-b|}{2}, \quad PQ = \frac{2ab}{a+b}.$$

Златни пресек је подела дужи на два дела тако да се цела дуж према већем делу односи као већи део према мањем (в. слику 2.3). Када је цела дуж јединичне дужине, а већи део дужине x тада имамо пропорцију

$$1 : x = x : (1-x), \tag{4.12}$$

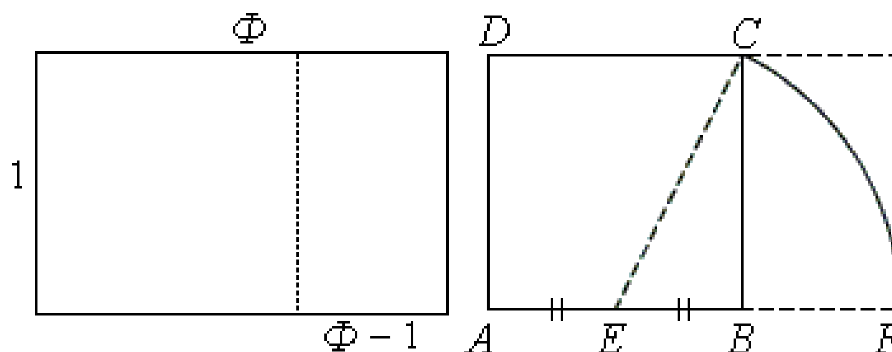
из које следи (квадратна) једначина

$$x^2 + x - 1 = 0. \tag{4.13}$$

У задатку 2.3.7 је проверавано да ирационалан број $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ решава ту једначину. Зато се тај број назива „златни број", а свака фигура у којој доминира једна од следеће две пропорције

$$\phi = \phi : 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \Phi = 1 : \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{4.14}$$

назива се „златном”. На слици 4.28 лево је „златни правоугаоник”, десно је приказана конструкција златног пресека помоћу квадрата.



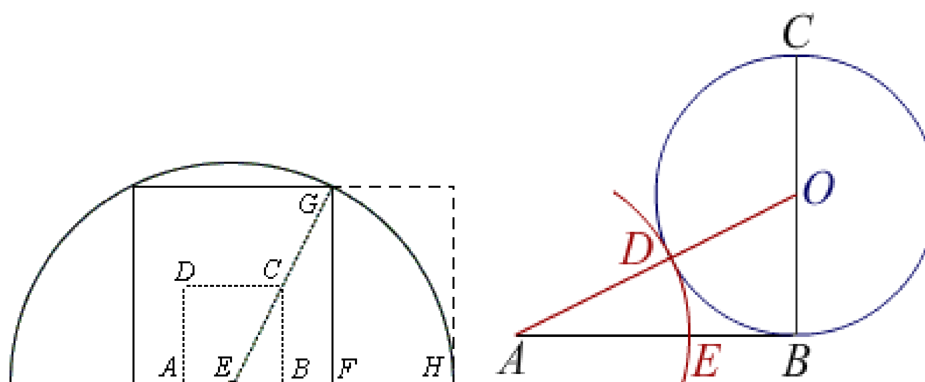
Slika 4.28: Златни правоугаоник и конструкција златног пресека.

Задатак 4.4.19. *Објаснити конструкцију златног пресека:*

i. на слици 4.28 десно;

ii. на слици 4.29 лево;

iii. ii. на слици 4.29 десно.



Slika 4.29: Конструкција златног пресека.

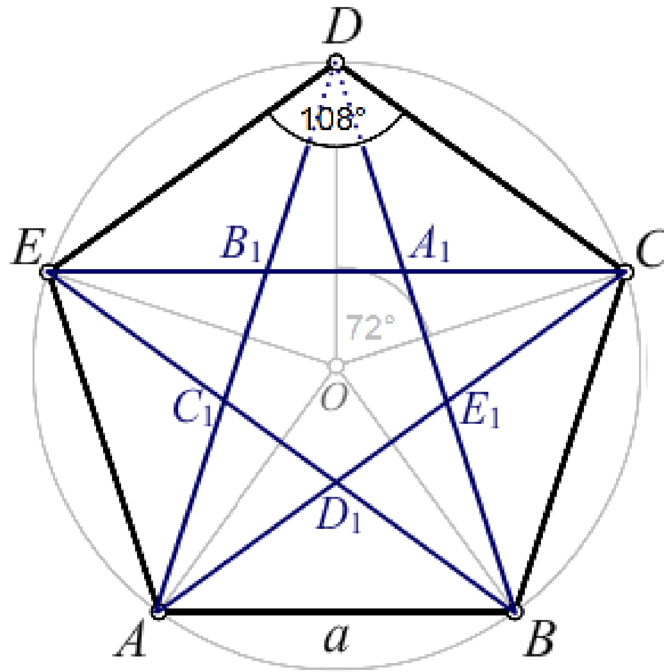
Пентагон (грч. пенте - пет и гониа - угао) је петострани многоугао или петоугао. То је затворена фигура омеђена са пет дужи које називамо страницама петоугла. Конвексни равни пентагон са страницама једнаких дужина називамо правилан пентагон. Дијагонале пентагона чине *пентаграм*, или звезду петокраку.

Задатак 4.4.20. *На слици 4.30 је правилан пентагон $ABCDE$ странице a. Доказати следећа тврђења.*

i. Унутрашњи углао је $108°$.

ii. Четвороугао $ABCE$ је тетиван трапез.

iii. Страница дијели дијагоналу у „златном” односу.



Slika 4.30: Правилан пентагон.

Задатак 4.4.21. *Конструисати правилан пентагон ако је задато:*

i. дужина d дијагонале;

ii. дужина a странице;

iii. полупречник r описане кружнице.

Задатак 4.4.22. *Конструисати троугао ABC ако је дато: α, β, $5a - 2b$.*

Задатак 4.4.23. *Конструисати троугао ABC ако је дато α, β и:*

$$\begin{array}{llllll} i. & h_c; & ii. & t_b; & iii. & R; \\ iv. & s_\alpha; & v. & 2s; & vi. & h_a + t_b. \end{array}$$

гдје је s_α симетрала угла $\alpha = \angle A$, а $s = (a + b + c)/2$ полуобим троугла.

Задатак 4.4.24. *Конструисати троугао ABC ако су дате:*

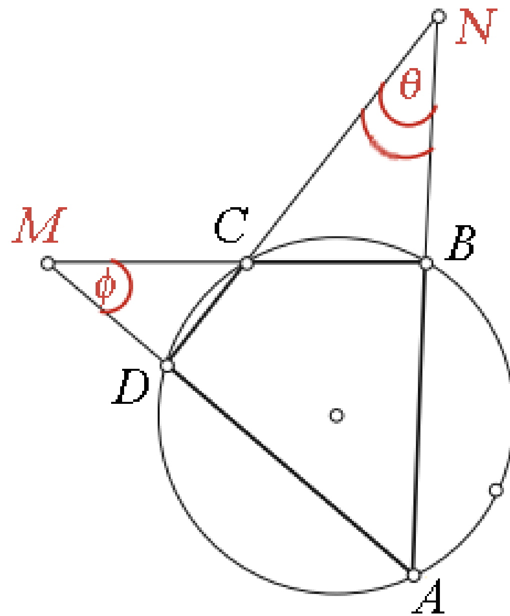
i. дужи, тежишнице t_a, t_b и t_c;

ii. тачке, средине страница $A_t \in BC$, $B_t \in CA$ и $C_t \in AB$;

iii. две странице и тежишница a, b и t_c;

iv. две странице и тежишница a, b и t_b.

Примјер 4.4.25. *Углови између наспрамних страница тетивног четвороугла су ϕ и θ. Показати да су унутрашњи углови четвороугла $90° \pm \frac{1}{2}(\phi \pm \theta)$.*



Slika 4.31: Тетиван четвороугао.

Рјешење. На слици 4.31 видимо четвороугао $ABCD$ уписан у круг, са продужецима страница $AD \cap BC = M$ и $\angle AMB = \phi$, затим $AB \cap CD = N$ и $\angle AND = \theta$. За унутрашње углове (тог тетивног) четвороугла важи:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

За унутрашње углове ΔABM и ΔADN важи, редом:

$$\angle A + \angle B + \phi = 180^\circ, \quad \angle A + \angle D + \theta = 180^\circ.$$

Отуда лако налазимо:

$$\angle A = 90^\circ - \frac{1}{2}(\phi + \theta), \quad \angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}(\phi + \theta),$$

$$\angle B = 90^\circ - \frac{1}{2}(\phi - \theta), \quad \angle D = 90^\circ + \frac{1}{2}(\phi - \theta),$$

а то је оно што је требало показати. □

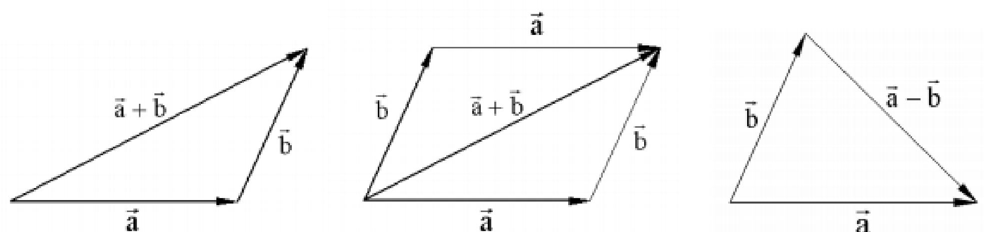
Glava 5

Линеарна алгебра

Алгебра у ужем смислу је област математике која проучава једначине. Шире гледајући, алгебра истражује односе и својства бројева помоћу знакова. Њен део који се бави векторима и матрицама назива се линеарна алгебра.

Површину, масу или температуру изражавамо бројевима које често називамо *скаларима*. Када кажемо да је ваздух у соби има 20°C (20 степени целзијуса), односно 68°F (68 степени фаренхајта), тада температуру просторије изражавамо скаларом у датим мерним јединицама[1]. Скалар означава интезитет нечега.

Убрзање, импулс или уопште величину коју одређује правац, смер и интензитет, називамо *вектор*. Када кажемо да се брод налази у Северном мору и плови 20 чворова[2] (37 km/h) у правцу југозапада, брзину брода изражавамо вектором. Векторе у геометрији представљамо орјентисаним дужима, као на слици 5.1.



Slika 5.1: Сабирање и одузимање вектора.

Још сложеније величине су *тензори*. У грађевинама на потпорне материјале често делују различите силе настојећи их смицати, сукати или кидати. За дефинисање тако сложених тензија у математици постоје нарочити пакети векторских величина које називамо тензорима.

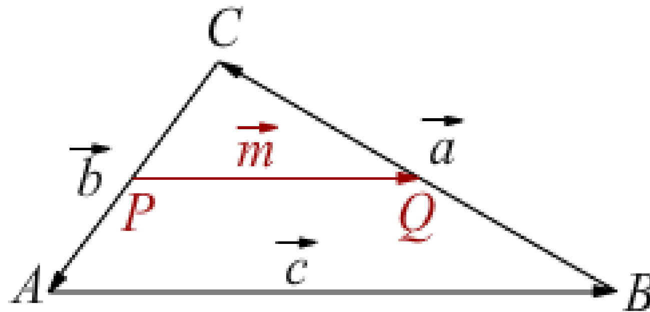
[1] конверзија је $F = 1,8 \cdot C + 32^\circ$ односно $C = (F - 32^\circ)/1,8$

[2] 1 чвор = 1,852 km/h

5.1 Вектори

Две паралелне *орјентисане дужи*, једнако усмерене и једнаких дужина су једнаки вектори. Тако на слици 5.1 у средини је паралелограм разапет векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, на чијим наспрамним страницама се налазе једнаки вектори. Векторе пресликавамо транслацијом у једнаке (не мењајући им правац, смер и интензитет), надовезујући их ради сабирања. Промена предзнака вектора значи његову промену смера.

Примјер 5.1.1. *Помоћу вектора на слици 5.2 показати да је средња линија PQ троугла ABC паралелна основици AB и једнака половини њене дужине.*



Slika 5.2: Средња линија PQ троугла ABC.

Рјешење. Крајње тачке $P \in AC$ и $Q \in BC$ вектора средње линије $\vec{m} = \overrightarrow{PQ}$ су средине страница вектора редом $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ троугла ABC на слици 5.2. Основица тог троугла је вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$.

Сабирањем, надовезивањем вектора на два начина налазимо:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}, \quad \vec{m} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},$$

а сабирањем ових добијамо $2\vec{m} = \vec{c}$. То значи да су вектори $\vec{m}$ и $\vec{c}$ паралелни, истог смера и да је први двоструко мањи од другог. То је управо тврђење које је и требало доказати. □

Задатак 5.1.2. *Помоћу вектора показати да је срења линија трапеза паралелна основицама и дужине једнаке половини збира њихових дужина.*

Задатак 5.1.3. *Доказати помоћу вектора да су средине страница произвољног четвороугла темена паралелограма.*

Задатак 5.1.4. *Доказати помоћу вектора да се дијагонале паралелограма међусобно полове.*

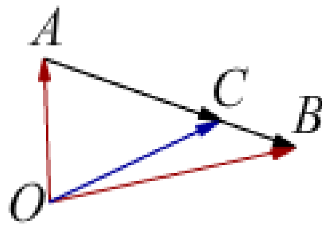
Задатак 5.1.5. *Доказати да је збир вектора тежишница троугла нула.*

Задатак 5.1.6. *Дата је O произвољна тачка, а T тежиште троугла. Доказати да је*

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Примјер 5.1.7. *Дата је произвољна тачка O и дуж AB која је подељена тачком C у размери $p : q$. Доказати да је*

$$\overrightarrow{OC} = \frac{q \cdot \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{OB}}{p + q}. \tag{5.1}$$



Slika 5.3: Дуж $AC : CB = p : q$.

Доказ. Са слике 5.3 видимо $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, затим израчунавамо:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{(p+q) \cdot \overrightarrow{OA} + p \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{p+q} = \frac{q \cdot \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{OB}}{p+q}.$$

То је и требало доказати. □

Задатак 5.1.8. *Нека су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, са интензитетима a и b редом. Показати да је вектор*

$$\vec{s} = \frac{a\vec{b} + b\vec{a}}{a + b}$$

паралелан симетрали угла између њих.

Теорема 5.1.9. *Дате су тачке A, B и O. Тачка C је између тачака A и B, то пишемо $A - C - B$, ако и само ако је*

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{OA}, \quad 0 \le \lambda \le 1. \tag{5.2}$$

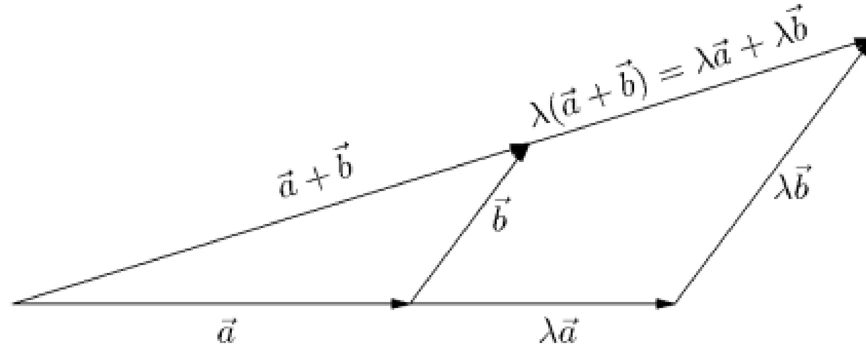
Доказ. Ако је $A - C - B$, тада постоји пропорција $AC : CB = p : q$ и важи једнакост (5.1), при чему је $\lambda = \frac{p}{p+q}$ и $1 - \lambda = \frac{q}{p+q}$.

Обатно, ако је тачно (5.2), онда је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, па је

$$\overrightarrow{AC} = [\lambda \cdot \overrightarrow{OB} + (1-\lambda) \cdot \overrightarrow{OA}] - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}.$$

То значи да су вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ колинеарни, а због $\lambda \in [0,1]$ је $A - C - B$. □

Дистрибутивност множења вектора скаларом, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ приказана је на слици 5.4.



Slika 5.4: Дистрибуција множења вектора скаларом.

Задатак 5.1.10. *Слично слици 5.4, илустровати следеће особине вектора:*
i. $(\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c})\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *- асоцијативност;*
ii. $(\exists\vec{0})\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ *- нула* $\vec{0}$ *је неутрални елеменат за сабирање;*
iii. $(\forall\vec{a})(\exists!\vec{a}')\ \vec{a} + \vec{a}' = \vec{a}' + \vec{a} = \vec{0}$ *- инверзни елеменат* $\vec{a}' = -\vec{a}$*;*
iv. $(\forall\vec{a},\vec{b})\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *- комутативност;*
v. $(\forall\vec{a},\vec{b})(\forall\lambda \in \mathbb{R})\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ *- дистрибутивност кроз векторе;*
vi. $(\forall\vec{a})(\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R})\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ *- дистрибутивност кроз скаларе;*
vii. $(\forall\vec{a})(\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R})\ (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ *- квазиасоцијативност;*
vii. $(\forall a)\ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ *- јединица је неутрална на множење.*

То је алгебра вектора орјентисаних дужи. Формално иста алгебра важи и за уређене n-торке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ brojeva $x_i \in \mathbb{R}$, за индексе $i = 1, 2, \dots, n$, па и за системе линеарних једначина или рецимо за полиноме степена не већег од неког унапред датог броја $n \in \mathbb{N}$. За тако поопштену векторску алгебру такође важе многа тврђења изведена помоћу орјентисаних дужи.

Следе задаци са векторима - орјентисаним дужима, који су били или су могли бити на математичким такмичењима редњошколаца[3].

Задатак 5.1.11 (Такмичење Војводине, 1980. године)**.** *Дат је правилан шестоугао* $ABCDEF$ *са срединама, тачкама* $P \in DE$*,* $Q \in AP$ *и* $S \in BC$*. Разложити вектор* $\overrightarrow{QS}$ *по векторима* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *и* $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$*.*

[3] в. сајт: `www.antonija-horvatek.from.hr`

Задатак 5.1.12 (Такмичење у Хрватској, 1989). *Дат је петоугао $ABCDE$ са срединама $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ и $N \in DE$. Средине дужи KM и LN редом су P и Q. Доказати да је $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.*

Задатак 5.1.13 (Такмичење у Србији, 1987). *Дат је четвороугао $ABCD$ са срединама $E \in AB$ и $F \in CD$. Доказати да су средине дужина AF, BF, CE и DE врхови праралелограма.*

Задатак 5.1.14 (Хрватска 1990. и Република Српска 2015. године). *Тачке E и F су средине страница AB и BC паралелограма $ABCD$, а тачка G је пресек дужи AF и DE. У којим односима (размерама) тачка G дијели дужи AF и DE?*

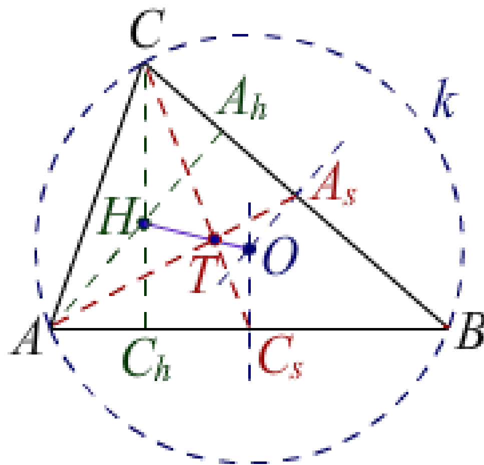
Задатак 5.1.15. *Четвороугао $ABCD$ је трапез са средњом линијом MN која се у тачкама P и Q сече са дијагоналама AC и BD. Доказати да је*

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}).$$

Примјер 5.1.16 (Такмичење у Хрватској 1988). *Ако су O, T и H редом средиште описане кружнице, тежиште и ортоцентар троугла ABC, доказати да је тада:*

i. $\overrightarrow{TH} = 2 \cdot \overrightarrow{OT}$,

ii. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ *- Хамилтонова теорема.*



Slika 5.5: Ојлерова линија O, T, H.

Рјешење. На слици 5.5 је троугао ABC уписан у кружницу $k(O, r)$ са центром O који се налази на пресеку симетрала страница (OA_s и OC_s) и полупречника[4] r. Тежиште је тачка T у којој се секу тежишнице (AA_s и CC_s). Ортоцентар је тачка H у којој се секу висине ($AA_h \perp BC$ и $CC_h \perp AB$).

[4]полупречник $r = OA = OB = OC$

i. O, T и H су колинеарне тачке које леже на тзв. Ојлеровој линији (в. и слику 3.16). Из сличности $\Delta C_sTO \sim \Delta CTH$ и чињенице да тежиште дијели тежишницу у односу $2:1$ почев од врха (в. задатак 3.3.8) следи $\overrightarrow{TH} = 2 \cdot \overrightarrow{OT}$.

ii. Све три тежишнице се секу у једној тачки, тежишту троугла (в. задатак 5.1.5), па је $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. □

Задатак 5.1.17 (СФРЈ 1988). *Нека је O средиште описане кружнице троугла ABC. Означимо са P, Q, R редом средишта лукова AB, BC, CA која не садрже редом тачке C, A, B. Ако за тачку X важи $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, доказати да је $X = S$, гдје је S средиште уписане кружнице троугла ABC.*

Задатак 5.1.18 (СФРЈ, 1986). *Из средишта сваке странице тетивног четвороугла конструисана је нормала на супротну страницу. Доказати да се ове четири нормале секу у једној тачки.*

Задатак 5.1.19 (СССР, 1984). *У равни су дата два једнакостранична троугла ABC и DEF, оба негативно орјентисана. Из произвољне тачке O полазе вектори $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ једнаки векторима редом $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$. Доказати да је троугао PQR једнакостраничан.*

Задатак 5.1.20. *Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Ако су BAM, CBN, DCP и ADQ правоугли једнакокраки троуглови, са правим угловима у тачкама M, N, P и Q, и ако су E, F, G и H средишта дужина MN, NP, PQ и QM, доказати да је тада $EFGH$ квадрат.*

Када вектор $\vec{a}$ множимо скаларом $\lambda \in \mathbb{R}$ мењамо му интензитет и смер, али не и правац. Множење негативним скаларом $\lambda < 0$ мења смер вектора. Множењем са $|\lambda| < 1$ вектор се скраћује, са $|\lambda| > 1$ вектор се продужава.

За два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кажемо да су *линеарно независни* акко

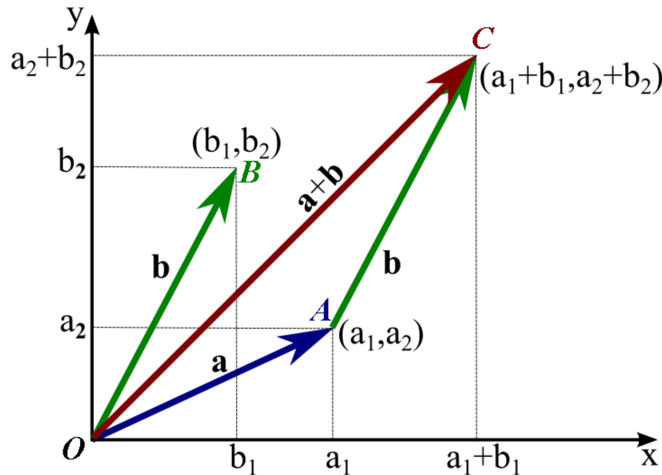
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0 \iff \alpha = \beta = 0. \tag{5.3}$$

Другим речима, ако два вектора нису колинеарна (немају исти правац) кажемо да су узајамно линеарно независни.

Задатак 5.1.21. *Тачке M и N су средине страница CD и BC конвексног четвороугла $ABCD$. Ако праве AM и AN деле дијагоналу BD на три једнака дела, тада је $ABCD$ паралелограм. Доказати!*

5.2 Координате

Векторе означавамо стрелицом изнад слова, рецимо $\vec{a}$ и $\vec{b}$, или масним словима, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. На слици 5.6 су у Декратовом правоуглом систему координата Oxy приказана два вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и њихов збир, вектор $\overrightarrow{OC}$.



Slika 5.6: Сабирање координата.

За дефинисање датих вектора довољно је знати крајње тачке, на слици редом (a_1, a_2), (b_1, b_2) и $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, јер је почетна увек исходиште координатног система. Тако дефинисани вектор $\overrightarrow{OB}$ на слици 5.6, једнак је вектору $\overrightarrow{AC}$ и формално их не разликујемо. Слика илуструје сабирање вектора помоћу координата. Сабирање са негативним бројевима је одузимање, па би било $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

Задатак 5.2.1. *Дате су тачке $A(2,1)$, $B(4,3)$ и $C(3,4)$ у Декартовом правоуглом систему Oxy, које су узастопна темена паралелограма $ABCD$. Наћи координате четвртог темена D.*

Према Питагориној теореми, дужина вектора $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ износи

$$\overline{OA} = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{5.4}$$

Аналогно за вектор $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$. Када од врха одузмемо почетак добијамо вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ дужине, тј. интензитета:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \tag{5.5}$$

Задатак 5.2.2. *Наћи дужине страница и дужине дијагонала паралелограма из претходног задатка. Показати да је то правоугаоник.*

Вишеструко сабиран сам са собом вектор постаје вишеструко дужи. Лако је проверити да вектор $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ множен скаларом $\lambda \in \mathbb{R}$ постаје $\lambda \cdot \overrightarrow{OA} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$. То је вектор λ пута дужи од датог ако је $|\lambda| > 1$, или краћи ако је $|\lambda| < 1$. Када је λ негативан број, множење мења смер вектора.

Задатак 5.2.3. *Показати да се паралелограм из претходног задатка множењем његових темена са параметром $\lambda \in \mathbb{R}$ пресликава хомотетијом са центром O и коефицијентом λ.*

На слици 5.6, приметимо да је (окомита) *пројекција* вектора $\overrightarrow{OA}$ на x-осу $\overline{Oa_1} = a_1$, а то је заправо прва координата тог вектора. Из правоуглог троугла $\Delta a_1 OA$ налазимо

$$\cos\angle a_1 OA = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}. \tag{5.6}$$

Исто имамо за пројекцију другог вектора $\cos\angle b_1 OB = \frac{b_1}{|\mathbf{b}|}$, па је угао између њих $\gamma = \angle b_1 OB - \angle a_1 OB$. Исти угао се може израчунати и помоћу косинусне теореме[5], претходно израчунавањем дужина вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, страница троугла ΔABO.

Задатак 5.2.4. *Дат је паралелограм са теменима $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(3,4)$ и $D(1,2)$.*
i. Израчунати углове између x-осе и страница паралелограма.
ii. Израчунати унутрашње углове троугла ABC.

Уопште, ако су $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ вектори и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ скалари, тада вектор

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.7}$$

називамо *линеарна комбинација* датих вектора $(\vec{a}_i)$ компоненти. Такође, кажемо да је вектор $\vec{a}$ растављен (развијен) по датим векторима.

Кажемо да је скуп вектора $V = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ *линеарно независан* ако њихова произвољна линеарна комбинација исчезава једино на тривијалан начин:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \tag{5.8}$$

У супротном, кажемо да је скуп вектора *линеарно зависан* када постоји бар једна њихова линеарна комбинација која исчезава на нетривијалан начин, тј. када постоји бар један ненулти скалар, $\lambda_i \ne 0$ за $i = 1, 2, \dots, n$, а важи

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \ne \vec{0}. \tag{5.9}$$

Нулвектор $\vec{0}$ означавамо и са 0.

Скуп $\mathbf{V}$ који садржи све могуће линеарне комбинације вектора из V називамо *векторски простор*. Најмањи скуп вектора из којих се може генерисати векторски простор назива се *база* векторског простора. Лако је доказати да поменути скуп V може бити база векторског простора само ако је линеарно независан.

[5] в. косинусна теорема 3.4.27

Примјер 5.2.5. *Ако скуп вектора V садржи нулвектор, рецимо $\vec{a}_1 = \vec{0}$, доказати да је линеарно зависан.*

Доказ. Из $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ следи да постоји линеарна комбинација датих вектора која исчезава на нетривијалан начин. То значи да је тај скуп вектора линеарно завистан. □

Задатак 5.2.6. *Доказати да је скуп вектора V линеарно зависан онда и само онда ако се барем један од њих може приказати као линеарна комбинација осталих.*

Задатак 5.2.7. *Показати да су било која два вектора колинеарна (на истој правој) ако и само ако су линеарно зависна.*

Задатак 5.2.8. *Показати да су било која три вектора компланарна (у истој равни) ако и само ако су линеарно зависна.*

Дакле, максимални могући број линеарно независних паралелних вектора је један. Број линеарно независних вектора у равни је највише два. Слично, највећи број линеарно независних вектора у (тродимензионалном) простору је три.

Примјер 5.2.9. *Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два линеарно независна вектора у равни, доказати да се сваки вектор $\vec{c}$ те равни може на јединствен начин приказати (раставити) као линеарна комбинација вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

Доказ. У равни могу бити највише два линеарно независна вектора, па су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линеарно зависни. Према томе, за неке скаларе α и β је $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

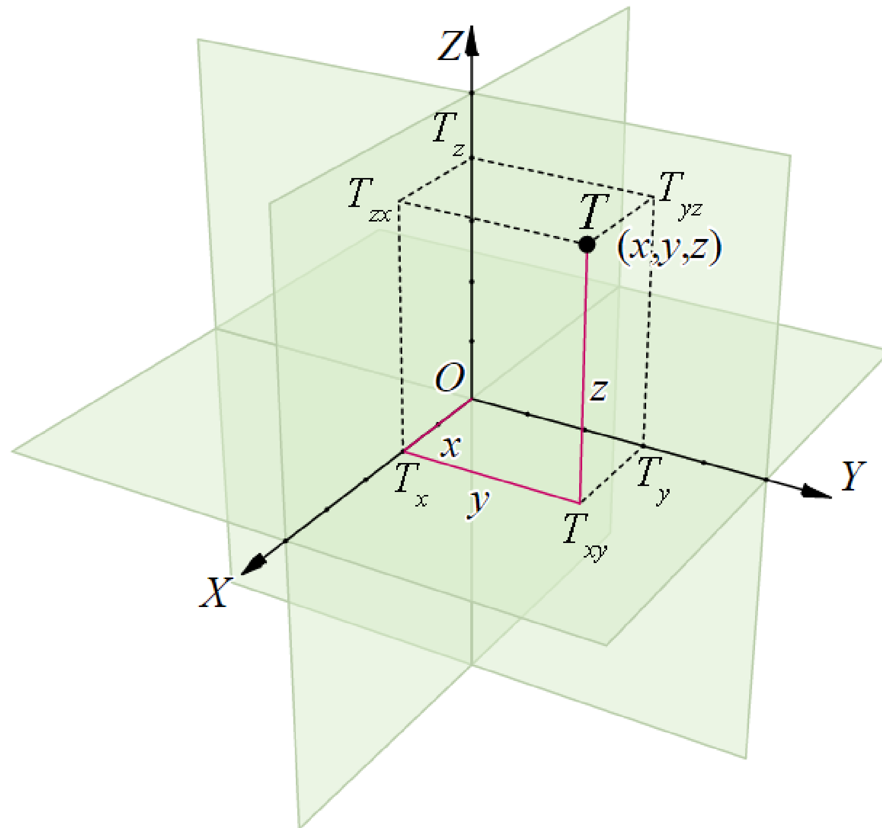
Да би доказали јединственост овог раставa, претпоставимо супротно, да постоји још један растав $\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$. Одузимањем добијамо $\vec{0} = (\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b}$, а како су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни, то мора бити $\alpha' = \alpha$ и $\beta' = \beta$. □

Задатак 5.2.10. *Ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ три линеарно независна вектора у (3-дим) простору, показати да се сваки вектор $\vec{d}$ простора може на јединствен начин приказати као линеарна комбинација вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.*

На слици 5.7 је приказан 3-димензионални Декартов правоугли систем координата. Координатне осе су једнако баждарени и узајамно окомити правци OX, OY, OZ усмерени од исходишне тачке O. Називамо их редом *апсциса*, *ордината* и *апликата*.

Пројекције тачке T на координатне равни OYZ, OZX и OXY су пресеци паралела кроз дату тачку редом са апсцисом, ординатом и апликатом, и поменутих равнина. На слици 5.7 то су тачке T_{yz}, T_{zx} и T_{xy}. Пројекције ових тачака, T_{ij}, на координатну осу, i односно j, су пресеци паралела кроз дату тачку са једном од тих оса, и друге осе. На слици су то тачке T_x, T_y и T_z.

Координатна оса се увек означава тако да се тачки на оси да вриједност њене удаљености од исходишта O, са једне стране позитивним а са друге негативним бројевима. Тако је вриједност тачке T_x на апсциси једнака дужини $OT_x = x$, а слично важи и за тачке T_y и T_z на ординати и апликати. Према томе су (x, y, z)



Slika 5.7: Декартов правоугли систем координата $OXYZ$.

пројекције тачке T на координатне осе. вриједности ових пројекција називају се координате.

Ортови су јединични вектори ортогоналних координатнихо оса. У Декартовом правоуглом систему то су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, редом за апсцису, ординату и апликату. Пројекцијама врха на координатне осе, сваки вектор $\overrightarrow{OT} = \vec{r}$ се може представити у облику

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{5.10}$$

гдје су $x = T_x$, $y = T_y$ и $z = T_z$ са слике 5.7. Ортови чине најједноставнију базу векторског простора.

Примјер 5.2.11. *Проверити да ли су вектори*

$$\begin{cases} \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \\ \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, \\ \vec{c} = -6\vec{i} + 17\vec{j} - 8\vec{k}, \end{cases}$$

линеарно зависни.

Рјешење. Тражимо скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ за које важи $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, редом:

$$-6\vec{i} + 17\vec{j} - 8\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) + \beta(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}),$$

$$= (2\alpha + 3\beta)\vec{i} + (3\alpha - 2\beta)\vec{j} - (4\alpha + \beta)\vec{k},$$

$$-6 = 2\alpha + 3\beta, \quad 17 = 3\alpha - 2\beta, \quad -8 = 4\alpha + \beta.$$

То је систем три линеарне једначине по непознатима α и β. Множећи прву једначину са 2, другу са 3 и сабирањем добијамо $\alpha = 3$. Множећи прву са 3, другу са 2 и одузимањем добијамо $\beta = -4$. Уврштавањем оба α и β у трећу налазимо сагласност, што значи да дати вектори јесу линеарно зависни и да је $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$. □

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ наведеног примјера чине базу векторског простора одређене равни тако да се сваки вектор те равни, као и поменути $\vec{c}$, може представити неком линеарном комбинацијом базних вектора.

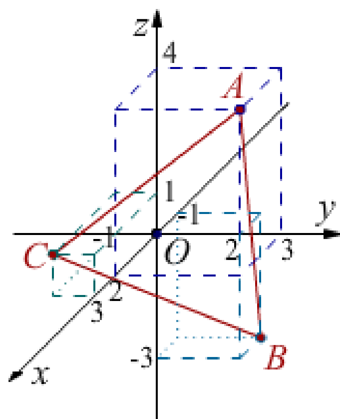
Задатак 5.2.12. *Проверити да ли вектори* $\vec{e}_1 = 3\vec{i} + \vec{j}$ *и* $\vec{e}_2 = \vec{i} - 2\vec{j}$ *чине базу 2-дим простора. Ако чине, приказати вектор* $\vec{v} = 9\vec{i} - 4\vec{j}$ *у тој бази.*

Користећи слику 5.7 и Питагорину теорему, лако налазимо дужину $\overline{OT}$, тј. интензитет вектора $\overrightarrow{OT}$:

$$|\overrightarrow{OT}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}. \tag{5.11}$$

Када тај вектор пишемо у облику (5.10) биће $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Примјер 5.2.13. *Скицирати у Декартовом правоуглом систему координата троугао са теменима* $A(2,3,4)$, $B(-1,2,-3)$ *и* $C(3,-1,1)$*, затим израчунати дужине страница страница и унутрашње углове.*



Slika 5.8: Троугао $A(2,3,4)$, $B(-1,2,-3)$ и $C(3,-1,1)$.

Рјешење. Дати троугао ABC је приказан на слици 5.8. Радијус вектори положаја темена, затим вектори страница и дужине страница, редом су:

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k},$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) - (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = -3\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) - (-\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) - (3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}, \end{cases}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{59}, \quad \overline{BC} = \sqrt{41}, \quad \overline{CA} = \sqrt{26}.$$

Ово последње јер је рецимо вектор $\overrightarrow{AB}$ једнак радијус вектору $(-3,-1,-7)$ па користимо (5.11). Даље, помоћу косинусне теореме, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\angle A$, налазимо:

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{59+26-41}{2\cdot\sqrt{59}\cdot\sqrt{26}} = 0,56171 \Rightarrow \angle A = 55,83^\circ.$$

Слично налазимо углове $\angle B = 41,21^\circ$ и $\angle C = 82,96^\circ$. □

Скаларни производ два вектора је скалар једнак производу интензитета тих вектора и косинуса угла између њих. Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пишемо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{5.12}$$

гдје је $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, а $\phi = \angle(\vec{a},\vec{b})$ угао између та два вектора.

Задатак 5.2.14. *Показати да су тачне релације:*
i. $(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$,
ii. $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$,
iii. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,
iv. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$,
v. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$,
vi. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$,

Задатак 5.2.15. *Наћи интензитет вектора* $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, *ако је* $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ *и* $\angle(\vec{p},\vec{q}) = 30^\circ$.

Задатак 5.2.16. *Нека су* $\vec{p} = \lambda\vec{m} + 2\vec{n}$ *и* $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ *узајамно окомити вектори, при чему су* $\vec{m}$ *и* $\vec{n}$ *јединични вектори.*
i. Одредити λ *ако је* $\vec{m}\perp\vec{n}$.
ii. Одредити $\angle(\vec{m},\vec{n})$ *ако је* $\lambda = 1$.

Ортоцентар је тачка у којој се секу висине троугла, а јединственост те тачке се може доказати и помоћу скаларног производа вектора.

Задатак 5.2.17. *Доказати да се висине троугла секу у једној тачки.*

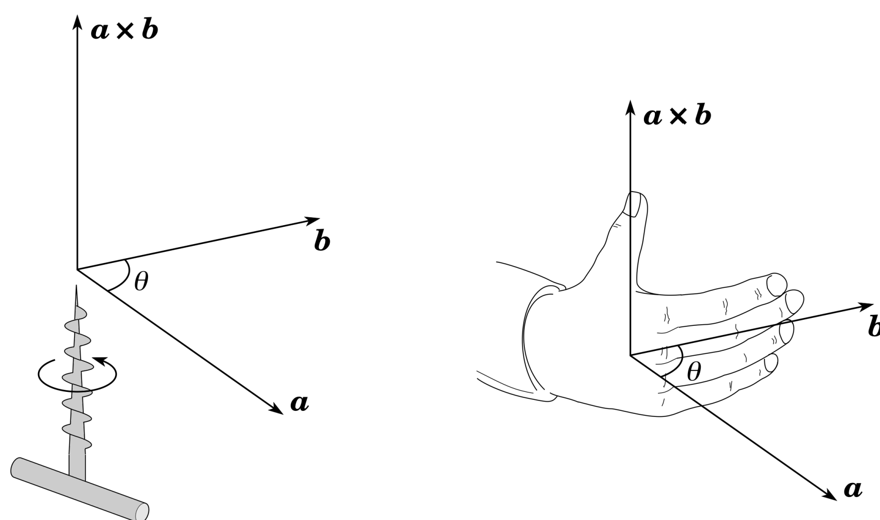
Знамо да је *ромб* паралелограм са суседним страницама једнаке дужине. Зато што је паралелограм дијагонале му се полове, али помоћу скаларног производа вектора можемо доказати и да су дијагонале ромба узајамно окомите.

Задатак 5.2.18. *Доказати да су дијагонале ромба нормалне.*

Косинусна теорема 3.4.27 се обично доказује двоструком применом Питагорине теореме. Међутим, она се може доказати и на друге начине.

Задатак 5.2.19. *Применом скаларног производа доказати косинусну теорему.*

Нека су дата два ненулта вектора $\vec{a} = \mathbf{a}$ и $\vec{b} = \mathbf{b}$, интензитета $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ и угла између њих $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta$. Њихов *вкторски производ* је вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ са интензитетом $|\mathbf{c}| = ab \sin\theta$, правцем окомитим на раван вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и позитивним смером.



Slika 5.9: Правило десног завртња, односно десне руке.

Позитиван смер у (3-дим) простору дефинишемо правилом десног завртња, или правилом десне руке[6], као на слици 5.9. Завртањ се окреће у десно (у смеру угла θ) и пролази кроз плочу (у смеру вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Савијени прсти десне шаке показују смер угла θ (редослед множења), а палац смер производа.

Приметимо да је интензитет вектора $\mathbf{c}$ једнак површини паралелограма којег разапињу вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ фактори векторског производа. Отуда одмах следеће две особине.

Задатак 5.2.20. *Проверити да за векторски производ важе релације:*

i. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$;

ii. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \| \mathbf{b}$;

[6] в. сајт: `www.met.reading.ac.uk/`

Задатак 5.2.21. *Доказати да за ортове важе једнакости:*

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=0, & \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0, & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0. \end{array}$$

Ове једнакости се лако памте када ортове поредамо циклично $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i},\mathbf{j},\dots$ и приметимо да узимањем узастопних с лева на десно добијамо позитивне производе, а уназад негативне.

Задатак 5.2.22. *Ако је* $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$*, доказати:*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}. \tag{5.13}$$

Израз (5.13) се често користи као дефиниција векторског производа. Свеједно, тај израз је веома користан.

Задатак 5.2.23. *Показати да за векторски производ вектора важи:*
i. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ - *антикомутативност;*
ii. $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$ - *хомогеност;*
iii. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ - *дистрибутивност с десна;*
iv. $\mathbf{c}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ - *дистрибутивност с лева;*

Користећи основни тригонометријски идентитет, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, лако се проверава следећа веза између векторског и скаларног производа два вектора.

Задатак 5.2.24. *Доказати идентитет*

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2. \tag{5.14}$$

Синусну теорему 3.4.26 смо доказивали користећи особину периферерних углова кружнице описане троуглу. Међутим, за доказ односа страница и синуса углова нам није потребна кружница.

Задатак 5.2.25. *Помоћу векторског множења доказати синусну теорему.*

Када се у 3-димензионалном Декартовом правоуглом систему координата $Oxyz$ посматра само једна фиксирана вриједност апликате, рецимо $z=0$, тада га редукујемо на 2-дим Декартов правоугли систем Oxy.

5.3 Једначине

У првој групи задатака вежбамо препознавање и примену линеарних једначина. Уједно се подсећамо и основних метода њиховог решавања.

Задатак 5.3.1. *Број 492 је раставлјен на два сабирка тако да је други сабирак три пута већи од првог. Који су то сабирци?*

Задатак 5.3.2. *Два лица се крећу брзинама* 50 km/h *и* 60 km/h *једно другоме у сусрет са удаљености* 220 km. *Колико им времена треба да се сретну?*

Када две једнаке величине помножимо истим бројем, добићемо једнаке величине. Када две једнакости $m = n$ и $p = q$ саберемо, добићемо једнакост $m + n = p + q$. На томе се заснива тзв. метода супротних коефицијената.

Примјер 5.3.3. *Збир цифара двоцифреног броја је 9. Ако цифре замене места, број ће бити за 45 већи. Који је то број?*

Рјешење. Тражимо број $\overline{xy} = 10x + y$, са цифрама $x, y \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Прву дату реченицу преводимо у једначну $x + y = 9$, а другу у $10y + x = 45 + 10x + y$ коју сводимо на једначину $y - x = 5$. Отуда линеарни систем:

$$\begin{cases} y + x = 9, \\ y - x = 5. \end{cases}$$

Сабирањем ових једначина и делењем са два добијамо $y = 7$. Множењем друге са -1 и сабирањем налазимо $x = 2$. Тражени број је 27. □

Задатак 5.3.4. *Ана је на пијаци*[7] *купила x килограма јабука и y килограма крушака по ценама 40 и 200 дин по килограму и платила укупно 520 динара. Бранко је купио исте количине јабука и крушака по ценама редом 60 и 100 динара по килограму и платио укупно 380 динара. По колико јабука, односно крушака су они куповали?*

За завршницу оваквих задатака су корисне детерминанте II реда:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{5.15}$$

Од производа са главне дијагонале одузмемо производ са споредне.

Задатак 5.3.5. *Израчунати детерминанте:*

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} n-1 & 2 \\ -n & n+1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \end{vmatrix}.$$

[7] Зелена пијаца на Бувљаку у Суботици, 17. децембра 2015. године.

Систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = a_0 \\ b_1x + b_2y = b_0 \end{cases} \tag{5.16}$$

има детерминанту система и детерминанте променљивих, редом:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} \tag{5.17}$$

са којима се дати систем своди на Крамеров[8]:

$$D \cdot x = D_1, \quad D \cdot y = D_2. \tag{5.18}$$

Крамеров систем је згодан и за дискусију система, за одређивање случајева у којима систем има односно нема решења.

Задатак 5.3.6. *Марко је 22.12.2015. купио[9] по x, односно y акција Кристал фонда и Телекома Српске по ценама 5,20 и 1,67 КМ редом уплативши (нето) 5682 КМ. Затим је 30.12.2015. те исте хартије продао по ценама 5,30 и 1,61 КМ редом, добивши (нето) 5736 КМ. Са колико акција је Марко трговао?*

Задатак 5.3.7. *Река има планински и равничарски део у којима се вода креће непознатим брзинама x односно y. На првом мерењу геодети су проценили дужину тока од 9 километара и у горњем делу убацили пловак у воду који се након 15 минута појавио на прелазу у мирнији део, а затим нако још 20 минута појавио на крају интервала. На другом мерењу, на дужини тока 10 километара, времена пловка била су 10 и 40 минута. Колике су брзине воде у та два тока?*

Задатак 5.3.8. *Пет великих и три мале (једнаке) посуде садрже 13 литара течности. Три мале посуде и још један литар течности стану у велику посуду. Колике су запремине посуда?*

Задатак 5.3.9. *Тест има 20 питања за укупно 100 поена од којих су тачно-нетачно питања са по 3 поена свако и са вишеструким избором са 11 поена свако. Колико је тачно-нетачно, а колико вишеструких питања у тесту?*

Систем линеарних једначина са две непознате (x, y) се лако представља графички. Свака таква једначина је у Декартовом систему (Oxy) права линија ℓ. Када праву ℓ напишемо у експлицитном облику, $y = kx + n$, онда коефицијент уз x расте са њеним нагибом према апсциси, а слободни коефицијент је место пресека ℓ и ординате. Прецизније, $k = \operatorname{tg}\phi$ гдје је $\phi = \angle(Ox, \ell)$, а $n = Oy \cap \ell$.

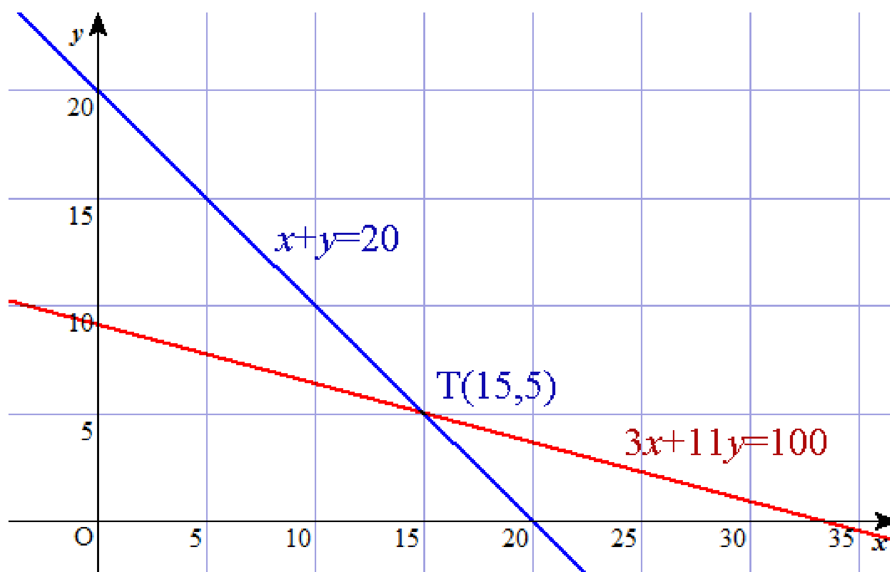
[8] Gabriel Cramer (1704-1752), швајцарски математичар.

[9] Бањалучка берза

Задатак 5.3.10. *Дат је систем једначина:*

$$\begin{cases} a: & y = -x + 20 \\ b: & y = -\frac{3}{11}x + \frac{100}{11}. \end{cases}$$

i. Показати да су једначине a и b еквивалентне онима из претходног задатка.
ii. Проверити да тим једначинама одговарају праве a и b на слици 5.10.
iii. Проверити да тачка $T(15,5) \in a \cap b$ решава дати систем.



Slika 5.10: Пресек правих је тачка $T(x,y)$.

Задатак 5.3.11. *Претставити графички једначине*

$$\begin{cases} a: & y = x + 1 \\ b: & y = -x + 3 \\ c: & y = 2x - 3 \end{cases}$$

и наћи све пресечне тачке линија a, b и c.

Експлицитни облик система линеарних једначина је:

$$\begin{cases} a: & y = k_a x + n_a \\ b: & y = k_b x + n_b, \end{cases} \tag{5.19}$$

Важи релација $a \| b \iff k_a = k_b$, а тада за $n_a = n_b$ систем има бесконачно решења, док за $n_a \ne n_b$ нема решења.

Задатак 5.3.12. *Графички тумачити и решити систем: $y = 1 - \lambda x$, $y = 2 - x$.*

Множећи (5.15) произвољним $a_y, b_y \neq 0$ добијамо еквивалентан систем:

$$\begin{cases} a: & a_x x + a_y y = a_0 \\ b: & b_x x + b_y y = b_0, \end{cases} \tag{5.20}$$

при чему је $a_x = -a_y k_a$ и $a_0 = a_y n_a$, односно $b_x = -b_y k_b$ и $b_0 = b_y n_b$. Отуда:

$$a \| b \iff a_x : a_y = b_x : b_y, \tag{5.21}$$

а тада за $a_0 : a_y = b_0 : b_y$ систем има бесконачно решења, иначе нема решења. Приметимо да (5.20) одговара систему (5.16).

Задатак 5.3.13. *Показати да су следеће праве:*
i. $x - 2y = 3$ *и* $7x - 14y = 21$ *паралелне и да се поклапају;*
ii. $3x - 6y = 10$ *и* $7x - 14y = 21$ *паралелне, без заједничких тачака.*

Када систем једначина нема решења кажемо да је *немогућ*, или противречан. Када систем једначина има бесконачно решења кажемо да је *неодређен.* За систем који има бар једно рјешење кажемо да је сагласан.

Задатак 5.3.14. *Доказати да се систем (5.20) своди на Крамеров систем:*

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y, \tag{5.22}$$

гдје су детерминанте система и промењљивих редом:

$$D = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} a_0 & a_y \\ b_0 & b_y \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_x & a_0 \\ b_x & b_0 \end{vmatrix}.$$

Показати да је (5.21) еквивалентно са $D = 0$*, када за* $D_x = D_y = 0$ *систем има бесконачно решења, иначе нема решења..*

Задатак 5.3.15. *Дискутовати и решити системе једначина:*

$$\begin{cases} a: & \lambda x + y = 1, \quad 1, \quad \lambda \\ b: & x + \lambda y = 1, \quad \lambda, \quad \lambda^2. \end{cases}$$

Још сложенији проблеми од ове „просте” дискусије су задаци гдје изразе прво морамо свести на познат облик (5.20). Тада користимо смене или разне хеуристичке методе.

Задатак 5.3.16. *Решити систем једначина:*

$$\frac{21}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 5, \quad \frac{49}{x+y} - \frac{27}{x-y} = -2$$

по непознатима x *и* y.

Задатак 5.3.17. *Решити и дискутовати систем једначина:*

$$\frac{1}{x+1} + m(y-2) = 1, \quad \frac{m}{x+1} + y - 1 = 2m$$

гдје су непознате x *и* y*, а* m *је параметар.*

Задатак 5.3.18. *Решити систем једначина:*

$$\frac{3}{2x-5} + x - 3y + 4 = 0, \quad \frac{5}{4x-10} - 2x + 6y + \frac{1}{2} = 0.$$

Задатак 5.3.19. *Дискутовати решења (по* x*) једначине*

$$\frac{a}{3a-x} = \frac{2}{b-x},$$

у којој су a *и* b *параметри.*

Задатак 5.3.20. *Дискутовати решења једначине*

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = 0,$$

по x*, гдје су* a *и* b *параметри.*

Задатак 5.3.21. *Решити једначину*

$$\frac{x-10}{1990} + \frac{x-11}{1989} + \dots + \frac{x-15}{1985} = \frac{x-1990}{10} + \frac{x-1989}{11} + \dots + \frac{x-1985}{15}.$$

Задатак 5.3.22. *Решити систем једначина* ($ab \ne 0$)*:*

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a}, \quad \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b}.$$

Посебан су случај једначине са апсолутним вриједностима (2.13).

Задатак 5.3.23. *Решити једначину* $|3-x| + 1 = |x| - 2x$*,* $x \in \mathbb{R}$.

Задатак 5.3.24. *Решити једначину*

$$\frac{|2-x| - |2x-3| + 4x - 1}{|x+4|} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задатак 5.3.25. *Решити једначину* $||x-1| - 1| = 2$*,* $x \in \mathbb{R}$.

Задатак 5.3.26. *Решити систем једначина:*

$$|x-y| = 2, \quad |x| + |y| = 4, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

5.4 Неједначине

Тражење вриједности варијабли за које је дата (не)једнакост тачна је решавање (не)једначина. Међутим, за разлику од еквивалентних трансформација једначина, множење неједначине негативним бројем мења је у супротну, релацију „$<$" односно „$\le$" мења редом у „$>$" односно „$\ge$", и обрнуто. Рецимо, за $x \le y$ и број $\lambda > 0$ биће $\lambda x \le \lambda y$; међутим, ако је $\lambda < 0$, тада је $\lambda x \ge \lambda y$.

Задатак 5.4.1. *Брзина објекта испаљеног увис је $v = 80 - 32t$ m/s, гдје је време t у секундама. Када ће брзина бити између 32 и 64 метра у секунди?*

Задатак 5.4.2. *Хоћу да инвестирам* 30 000 *евра. Део иде на стабилних* 5% *камате (годишње) прихода, а остало у посао за који очекујем* 7% *добити. Ако желим да мој приход буде бар* 1 900 *евра годишње, који део новца требам одвојити за стабилну камату?*

Задатак 5.4.3. *Нека легура треба да садржи од 46% до 50% бакра (Cu). Наћи најмању и највећу количину 60% бакра који се може мешати са 40% бакром да би се добило 30 kg легуре са дозвољеним процентом бакра.*

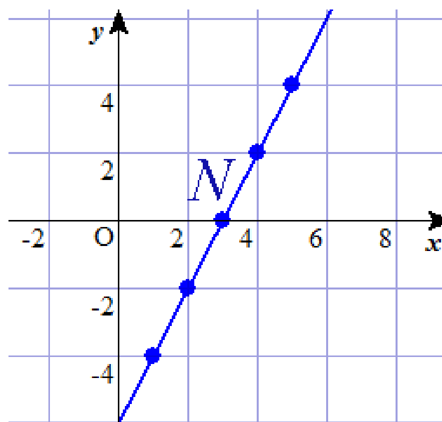
У завршници, неједначине решавамо таблично и графички. При томе је најважнија фаза тзв. испитивање знака функције.

Примјер 5.4.4. *Испитати знак функције $f(x) = 2x - 6$.*

Рјешење. Израчунавамо вриједности функције $f = 2x-6$ за неке вриједности променљиве x и вриједности пописујемо:

x	1	2	3	4	5
f	-4	-2	0	2	4

Помоћу добијене табеле цртамо граф функције на слици 5.11.



Slika 5.11: Граф функције $f(x) = 2x - 6$.

Знак функције се мења у тачки $N(3,0)$ коју називамо нулом функције. Нула функције је централно место таблице:

x	$\infty < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
f	$-$	0	$+$

Према томе, за $x < 3$ је $f(x) = 2x - 6$ негативно, а за $x > 3$ позитивно. □

Задатак 5.4.5. *Испитати знак функција:*

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3; \quad f_2(x) = 4 - 0,5x; \quad f_3(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x.$$

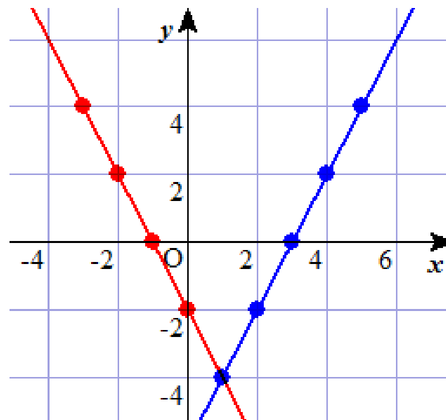
Производ функција $(f_1 \cdot f_2)$ мења знак када нека од функција фактора мења знак. Тада се може дестити и двострука промена знака (дакле нема промене) ако оба фактора мењају знак у истој апсциси. Аналогно важи за количник функција $(f_1 : f_2)$ при чему актуелни називник не сме бити нула $(f_2 \neq 0)$.

Примјер 5.4.6. *Испитати знак производа функција $f_1(x) = 2x-6$ и $f_2(x) = -2-2x$.*

Рјешење. Користимо претходно $f_1 = 2x - 6$, а израчунавамо ново $f_2 = -2 - 2x$:

x	-3	-2	-1	0	1
f_2	4	2	0	-2	-4

Затим цртамо обе функције на истом графу, на слици 5.12.



Slika 5.12: Граф функција $f_1(x) = 2x - 6$ и $f_2(x) = -2 - 2x$.

Промене знака производа $f_1 f_2$ су у тачкама -1 и 3, што дефинише табелу:

x	$\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
f_1	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f_2	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f_1 f_2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Према томе, производ $f_1 f_2$ за $x \in (-1, 3)$ је позитиван, а за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ је негативан. □

Задатак 5.4.7. *Испитати знак производа:*

$$\left(\frac{1}{2}x - 3\right)\left(\frac{5}{2}x - 1\right); \quad (2x-5)(4-0,5x); \quad \left(7 - \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3} - 4x\right).$$

Задатак 5.4.8. *Испитати знак количника:*

$$\frac{2x-3}{3x-5}; \quad \frac{2-3x}{0,5x-2}; \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x}; \quad \frac{\frac{2x-5}{3} - \frac{3-5x}{2}}{\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{3}}.$$

Задатак 5.4.9. *Решити неједначину $f(x) \ge 0$ за:*

$$f_1(x) = \frac{x^2 - x - 6}{1-x}; \quad f_2 = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 2}.$$

У случају „незгодних" израза, $f_1 \le f_2$, све сабирке пребацимо на једну страну неједнакости, $f_1 - f_2 \le 0$, раставимо на факторе ту страну и користимо претходне методе.

Примјер 5.4.10. *Наћи сва решења неједначине: $x + x^2 \ge 3x + 3$.*

Рјешење. Све сабирке преводимо на леву страну неједнакости и растављамо на факторе:

$$x + x^2 - 3 - 3x \ge 0,$$

$$(x-3)(1+x) \ge 0.$$

Овај израз је еквивалентан са оним из примјера 5.4.6, па имамо:

$$(2x-6)(-2-2x) \le 0,$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty).$$

Рјешење је свако $x < -1$ или $x > 3$. □

Задатак 5.4.11. *Решити неједначине:*

$$i.\ \frac{x+2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} < 1; \quad ii.\ \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(1-x)(x^2-25)} > 0; \quad iii\ \frac{-3x^2 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + x - 3} \le -1.$$

Неке неједначине немају решења, па су њихове негације увек тачне. На примјер, неједначина $x^2 < 0$ је немогућа за $x \in \mathbb{R}$, па је њена негација $x^2 \ge 0$ таутологија. Неке од њих су веома корисне, али се морају доказивати довитљивим методама.

Задатак 5.4.12. *Ако је $a \ge b$, $x \ge y$, тада је $ax + by \ge bx + ay$.*

Непосредна последица тврђења овог задатка је неједнакост између аритметичке и геометријске средине за два броја, коју смо доказали у задатку 2.3.19, а коју можемо написати и у облику

$$a^2 + b^2 \ge 2ab. \tag{5.23}$$

Исто се може искористити у доказу следеће, неједнакости аритметичке и геометријске средине за три броја.

Задатак 5.4.13. *Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи неједнакост*

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

и да неједнакост прелази у једнакост ако и само ако $a = b = c$.

Покушајте сада доказати следећи, користећи претходни задатак.

Задатак 5.4.14. *За позитивне бројеве a, b, c важи неједнакост*

$$\sqrt[3]{abc} \ge \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Неједнакост постаје једнакост ако и само ако $a = b = c$.

Уопште, за $n \in \mathbb{N}$ позитивних бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ дефинишемо аритметичку, геометријску и хармонијску средину редом као бројеве:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}. \tag{5.24}$$

Добро је познато да за свако такво n важе релације:

$$H_n \le G_n \le A_n, \tag{5.25}$$

гдје неједнакости постају једнакости акко $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Задатак 5.4.15. *Доказати опште неједнакости средина (5.25).*

Упутство. Прво доказати $A_n \ge G_n$ индукцијом на начин решења задатка 5.4.13, а затим $G_n \ge H_n$ на начин задатка 5.4.14. □

Употреба поменутих AGH неједнакости (5.25) у математици је веома разноврсна. То нарочито у алгебри. Зато погледајмо пар необичних примјера из геометрије.

Задатак 5.4.16 (Ојлер)**.** *Дат је троугао ABC са полупречницима уписане r и описане R кружнице. Доказати да је $R \ge 2r$.*

Задатак 5.4.17. *За произвољан троугао ABC важи неједнакост:*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{3}{2R},$$

гдје су му a, b и c странице, а R полупречник описане кружнице.

Наредне две неједнакости су такође популарне у (вишој) математици. Доказаћемо их (елементарно) помоћу скаларног производа вектора.

Задатак 5.4.18 (Коши-Шварц). *Доказати да је увек тачна неједнакост*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Неједнакост постаје једнакост акко $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

Задатак 5.4.19 (Минковски). *Доказати да је увек тачна неједнакост*

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Неједнакост постаје једнакост акко $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$.

Следећа је Бернулијева[10] неједнакост, такође често употребљавана не само у математици.

Задатак 5.4.20 (Бернули). *Доказати да за* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x > -1$ *важи*

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx.$$

Задатак 5.4.21 (Геометриски низ). *За дато* $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *дефинишимо низ:*

$$b_0 = 1, \quad b_1 = x, \quad b_2 = x^2, \quad \dots, \quad b^n = x^n$$

и збир $Z_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$. *Доказати следећа тврђења.*

i. $Z_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ *за* $x \ne 1$, *а* $Z_n = n$ *за* $x = 1$*;*

ii. За $x \in (0, 1)$ *је* $x = \frac{1}{1+q}$, $q > 0$ *и важе*[11] *неједнакости* $0 < x^n < \frac{1}{1+nq}$.

iii. За $x \in (0, 1)$ *и довољно велико* n *је довољно тачно* $Z_\infty = \frac{1}{1-x}$.

iv. $0,6111\dots = \frac{11}{18}$.

Задатак 5.4.22. *Помоћу Бернулијеве неједнакости доказати да са порастом броја* $n = 1, 2, 3, \dots$ *следеће апроксимације постају све тачније:*

i. $\sqrt[n]{n} \approx 1$, *што пишемо:* $\sqrt[n]{n} \to 1$ *када* $n \to \infty$.

ii. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, *гдје је број* $e \approx 2,71828$.

Ови задаци нису више у области алгебре, поготово не у области линеарне алгебре, већ су поприлично у тзв. математичкој анализи.

[10] Johann Bernoulli (1667–1748), швајцарски математичар

[11] Другим речима, када $x \in (0, 1)$ и $n \to \infty$ тада $x^n \to 0$.

Glava 6

Полиноми

Полином је израз који се састоји од варијабли и коефицијената, који укључује само операције сабирања, одузимања, множења и степеновања природним бројевима. Сабрици унутар полинома називају се мономи. На примјер, израз $x^5+15xy^2z-12z+\frac{1}{3}$ је полином, са варијаблама x, y, z и коефицијентима 15, -12, $\frac{1}{3}$, у четири монома. Према томе, збир и производ полинома су полиноми, али количник није.

Полиноми првог, другог, трећег, ..., n-тог степена су они који садрже варијабле највише датог степена. На примјер, то су редом $\frac{1}{2}x-3$, $yz-\frac{4}{7}x-y+5$, $-x^2y+z$, ..., $3x^n-\frac{6}{13}x^{n-1}+17x-1$. Када саберемо, односно помножимо два полинома m-тог и n-тог реда, а $m \le n$, тада је збир полином највише n-тог, а производ полином највише $m+n$-тог реда.

Нама су овдје најважнији полиноми са једном варијаблом, облика:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{6.1}$$

гдје је x варијабла (промењлива величина), а $a_k \in \mathbb{R}$ редом за $k = 0,1,\dots,n-1,n$ су коефицијенти (константне вриједности). Сабирак a_n је слободни члан полинома $p(x)$, а a_0x^n је водећи. Ако је коефицијент водећег члана један, $a_0 = 1$, кажемо да је полином нормиран.

Решења полиномске једначине, облика $p(x) = 0$, су реални и комплексни бројеви. На примјер $x^2+1=0$ има два решења $x_1 = i$ и $x_2 = -i$, гдје је $i = \sqrt{-1}$ тзв. *имагинарна* јединица. Једначина $x^2-2x+2=0$ има решења $1+i$ и $1-i$ које називамо комплекси (збирови реалног и имагинарног). Сабирањем и множењем *комплексних бројева* добијамо комплексне бројеве, а скуп свих означавамо са $\mathbb{C}$.

Када су сви коефицијенти полинома $p(x)$ рационални бројеви, $(\forall k)\ a_k \in \mathbb{Q}$, тада решења једначина облика $p(x) = 0$ називамо *алгебарским бројевима*. Приметимо да су сви рационални бројеви алгебарски. Наиме, за сваки $b \in \mathbb{Q}$ постоји полиномска једначина са рационалним коефицијентима, $x-b=0$, чије рјешење је управо b. Они реални и комплексни бројеви који нису алгебарски су *трансцедентни бројеви.*

Рационална функција је разломак $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ чији бројник $p_1(x)$ и називник $p_2(x)$ су полиноми. Збир, разлика, производ и количник рационалних функција су рационалне функције. Њихов посебни случај су *билинеале*, облика $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

6.1 Делење

Два полинома су једнака када су истог степена а одговарајући коефицијенти (коефицијенти уз исте степене промењљиве) су им једнаки. За свака два полинома $p(x)$ и $q(x)$ постоје јединствени полиноми $s(x)$ и $r(x)$ такви да је

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x) \tag{6.2}$$

а степен полинома $r(x)$ је мањи од степена полинома $q(x)$. Полином $s(x)$ назвиамо количник, а $r(x)$ остатак при дељењу полинома.

Примјер 6.1.1. *Одредити количник и остатак при делењу полинома:*
i. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ *са* $q(x) = x^2 - 1$;
ii. $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ *са* $q(x) = x^2 + 2$;

$$
\begin{array}{l}
x^3-2x^2-5x+6 : (x^2-1) = x-2 \\
-(x^3-x) \\
\hline
\quad -2x^2-4x+6 \\
\quad -(-2x^2+2) \\
\hline
\qquad -4x+4
\end{array}
$$

Slika 6.1: Количник $p(x) : q(x) = s(x)$ са остатком $r(x)$.

Рјешење. i. На слици 6.1 се види делење датих полинома $p(x)$ и $q(x)$, са количником $s(x) = x - 2$ и остатком $r(x) = -4x + 4$. Непосредним множењем проверавамо да важи једнакост $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$.

ii. Прво множимо факторе и налазимо $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, затим делимо полиноме на претходни начин и налазимо количник $s(x) = x+2$ и остатак $-7x-10$. □

Задатак 6.1.2. *Одредити количник и остатак делења полинома:*
i. $p(x) = x^4 - 2x + 3$ *са* $q(x) = x^2 + x + 1$;
ii. $p(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ *са* $q(x) = x^2 - x + 1$.

Еуклидов алгоритам дељења важи и за полиноме. Нека је степен полинома $p(x)$ већи од степена $q(x)$, тако да можемо писати:

$$
\begin{array}{rcll}
p & = & q \cdot q_1 + r_1 & (\text{степен } r_1 < q_1) \\
q & = & r_1 \cdot q_2 + r_2 & (\text{степен } r_2 < r_1) \\
r_1 & = & r_2 \cdot q_3 + r_3 & (\text{степен } r_3 < r_2) \\
\dots & & & \\
r_{k-2} & = & r_{k-1} \cdot q_k + r_k & (\text{степен } r_k < r_{k-1}) \\
r_{k-1} & = & r_k \cdot q_{k+1} &
\end{array}
$$

коначно $r_k = \text{NZD}(p, q)$.

Примјер 6.1.3. *Наћи највећи заједнички дијелилац полинома* $q = x^2 - 1$ *и полинома:*
i. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$*;*
ii. $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Рјешење. i. Дати су $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ и $q(x) = x^2 - 1$, а већ смо израчунали $q_1 = x - 2$ и $r_1 = -4x + 4$. Даље израчунавамо:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= (x^2 - 1)\cdot(x - 2) + (-4x + 4) \\ x^2 - 1 &= (-4x + 4)\cdot(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

Коначно $r_1 = -4x + 4$, па можемо ставити $\text{NZD}(p, q) = x - 1$.

ii. За $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ и $q(x) = x^2 - 1$ израчунавамо количник $q_1 = x + 2$ и остатак $r_1 = -4x - 4$. Затим налазимо:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x^2 - 1)\cdot(x + 2) + (-4x - 4) \\ x^2 - 1 &= (-4x - 4)\cdot(-\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

Коначно $r_1 = -4x - 4$, па је $\text{NZD}(p, q) = x + 1$. □

Задатак 6.1.4. *Наћи највећи заједнички дијелилац полинома:*
i. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$,
ii. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$,
и полинома $q = 4x^2 - 9$.

За полиноме кажемо да су дељиви, ако је остатак њиховог делења нула. У случају дељивости са полиномом првог степена, користан је следећи, Безуов[1] став.

Теорема 6.1.5 (Безуова)**.** *Ако је полином* $p(x)$ *дељив са* $x - a$*, тада је* $p(a) = 0$.

Доказ. Како је остатак делења нула, биће $p(x) = (x - a)s(x)$, гдје је $s(x)$ количник. Према томе је $p(a) = (a - a)s(a) = 0$. □

Задатак 6.1.6. *Одредити коефицијент* λ *тако да полином* $p(x)$ *буде дељив полиномом* $q(x)$*, ако је:*
i. $p(x) = x^4 + \lambda x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x - 1$*;*
ii. $p(x) = x^2 + \lambda x + 1$, $q(x) = 3x + 2$.
Затим наћи количник датих полинома.

Задатак 6.1.7. *Ако је полином* $p(x)$ *дељив полиномима* $q_1(x)$ *и* $q_2(x)$*, одредити коефицијенте* α *и* β.
i. $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, $q_1(x) = x + 1$ *и* $q_2(x) = x - 2$.
ii. $p(x) = x^4 - x^3 + \alpha x^2 - x + \beta$, $q_1(x) = x - 31$ *и* $q_2(x) = x + 2$.
Затим поделити дати $p(x)$ *редом са оба* $q_1(x)$ *и* $q_2(x)$.

Теорема 6.1.8. *Ако полином* $p(x)$ *подељен са* $x - a$ *има остатак* r*, тада је* $r = p(a)$.

Доказ. Из $p(x) = (x - a)s(x) + r(x)$ и чињенице да је полином $r(x)$ степена мањег од $x - a$, следи да је $r(x) = r$ константа. Посебно, за $x = a$ биће $p(a) = r$. □

[1] Étienne Bézout (1730-1783), француски математичар.

Задатак 6.1.9. *Ако је остатак дељења полинома* $p(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 4$ *биномом* $x - 1$ *једнак* 10, *а остатак дељења биномом* $x + 1$ *једнак* 4, *одредити* $a^2 - b^2$.

Задатак 6.1.10. *Одредтити бројеве* a *и* b *тако да полином* $p(x) = x^3 + 2ax^2 - bx + 5$ *даје једнаке остатке при дељењу са* $x + 1$, $x - 1$ *и* $x + 4$.

Задатак 6.1.11. *Наћи непознате бројеве* a *и* b.
i. *Ако је* $r(x) = 3x + 2$ *остатак делења* $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ *са* $q(x) = x^2 + x - 2$.
ii. *Ако је* $r(x) = 7x + 7$ *остатак делења* $p(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ *са* $q(x) = x^2 - x - 2$.

Задатак 6.1.12. *Одредити потребан и довољан услов да би полином* $x^3 + px + q$ *био дељив полиномом:*
i. $x^2 + mx - 1$,
ii. $x^2 + mx + 1$.
Затим израчунати количник.

Задатак 6.1.13. *Одредити* $a, b \in \mathbb{R}$ *тако да полином* $p(x)$ *буде дељив са* $q(x)$.
i. $p(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$, $q(x) = x^2 - x + b$.
i. $p(x) = 7x^4 + 6x^3 + ax^2 - 2x + 3$, $q(x) = x^2 + x + b$.

Задатак 6.1.14. *Одредити остатке делења полинома*

$$p(x) = x^{2009} - 3x^{2008} + x^{1009} - 3x^{1008} + x + 3$$

полиномима $x + 1$, $x - 3$ *и* $(x + 1)(x - 3)$.

Задатак 6.1.15. *Дат је неки полином* $p(x)$ *најмање другог степена. Ако је* 4 *остатак делења тог полинома биномом* $x - 3$, *а* 2 *је остатак делења тог полинома биномом* $x - 2$, *одредити остатак делења датог полинома са* $(x - 2)(x - 3)$.

Задатак 6.1.16. *Одредити коефицијенте* $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *тако да полином*

$$p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

при делењу са $x - 1$ *има остатак* 10, *при делењу са* $x + 1$ *има остатак* 4, *при делењу са* $x + 2$ *има остатак* -8, *а при делењу са* x *има остатак* 2.

Задатак 6.1.17. *Нормирани полином* $p(x)$ *четвртог степена задовољава једнакости* $p(1) = 10$, $p(2) = 20$ *и* $p(3) = 30$. *Одредити* $p(12) + p(-8)$.

Хорнерова шема је поступак одређивања количника $s(x)$ из формуле (6.2) када је $q(x) = x - c$ полинома $p(x)$ дефинисаног изразом (6.1). Хорнер[2] је срeђивањем идентитета (6.2) добио:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (s_0x^{n-1} + \dots + s_{n-2}x + s_{n-1})(x - c) + r$$

$$= s_0x^n + (s_1 - cs_0)x^{n-1} + \dots + (s_{n-1} - cs_{n-2})x + r - cs_{n-1},$$

[2] William George Horner (1786-1837), британски математичар.

па изједначавањем коефицијената:

$$a_0 = s_0, \quad a_1 = s_1 - cs_0, \quad \dots \quad a_{n-1} = s_{n-1} - cs_{n-2}, \quad a_n = r - cs_{n-1},$$

односно:

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_1 + cs_0, \quad \dots \quad s_{n-1} = a_{n-1} + cs_{n-2}, \quad r = a_n + cs_{n-1}. \tag{6.3}$$

Тиме је одређен количник $s(x)$ и остатак r.

Задатак 6.1.18. *Наћи количник и остатак дељења $p(x) : q(x)$, ако су полиноми:*
i. $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $q(x) = x - 1$;
ii. $p(x) = 2x^5 - 3x^2 + 5x - 4$, $q(x) = x - 2$;
користећи Хорнерову шему.

Према Хорнеровој шеми састављамо таблицу, која олакшава израчунавања:

	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-1}	a_n
c	s_0	$s_1 = a_1 + cs_0$	$\dots$	$s_{n-1} = a_{n-1} + cs_{n-2}$	$r = a_n + cs_{n-1}$

Резултат је (6.2), тј.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = (s_0 x^{n-1} + \dots + s_{n-2}x + s_{n-1})(x - c) + r, \tag{6.4}$$

гдје полазни полином (6.1) пишемо скраћено $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$.

Задатак 6.1.19. *Наћи количник и остатак дељења полинома:*
i. $p(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ *са* $q(x) = x - 1$,
ii. $p(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1$ *са* $q(x) = x + 2$,
користећи Хорнерову таблицу.

Нула полинома или корен полинома $p(x)$ је такав број x_0 да је $p(x_0) = 0$. Тада једначина (6.2) постаје $p(x) = s(x)(x - x_0)$, гдје $r(x) = 0$. Према основној теореми алгебре (коју нећемо доказивати) сваки полином степена $n \geq 1$ има бар једну нулу.

Примјер 6.1.20. *Одредити нуле полинома $p(x) = 2x^2 - 6x + 4$ растављајући га на факторе.*

Рјешење. Из $p(x) = 2x^2 - 2x - 4x + 4 = -2x(x - 1) - 4(x - 1) = (-2x - 4)(x - 1)$ следи $p(x) = -2(x - 2)(x - 1)$, ра је $p(x) = 0$ када је $x = 2$ или $x = 1$. □

Задатак 6.1.21. *Растављањем на факторе одредити нуле полинома:*
i. $p_1(x) = x^4 - 288x^2 + 119$,
ii. $p_2(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Задатак 6.1.22. *Раставити на факторе полиноме:*
i. $x^5 + x + 1$,
ii. $x^3 + x^2 + 4$.

6.2 Нултачке

Видели смо да број $x = x_0$ нулира полином $p(x)$ дефинисан изразом (6.1) ако и само ако је остатак $r(x)$ дељења тог полинома са $q(x) = x - x_0$ дефинисан изразом (6.2) идентички једнак нули. Тај број x_0 називамо *нултачком* полинома.

Један од начина налажења нултачки је растављање полинома на факторе. Метода обрнута закону дистрибуције $a(b+c) = ab + ac$ назива се груписање.

Задатак 6.2.1. *Раставити на факторе дистрибуиран израз:*

$$15a^2b - 10ab^2, \quad 60a^3b^2c^2 - 12a^2b^3c^2 - 24a^2b^2c^3,$$
$$15ax - 21a - 10bx + 14b, \quad 20ax - 8ay + 15x - 6y.$$

Растављање на факторе је умеће које се учи полако, пре свега увежбавањем препознавања методе груписања сабирака, заједно са употребом степеновања бинома, квадратом тринома или разлике квадрата односно кубова.

Задатак 6.2.2. *Непосредним множењем проверити тачност формула:*

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2, \quad x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$
$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^3y + 3xy^3 \pm y^3, \quad x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2).$$

Задатак 6.2.3. *Раставити на факторе комбиновањем претходних:*

$$x^2 + 2xy + y^2 - x - y, \quad x^3 - 1 - (x-1)^3,$$
$$x^4 - 2x^2 + 1 - (x+1)^2, \quad (9x^2 - 16y^2)(3x+4y) - (3x-4y)^2(3x+4y).$$

Задатак 6.2.4. *Уочити кубове и раставити на факторе:*

$$40a^4 - 180a^3b + 270a^2b^2 - 135ab^3, \quad 54x^4y + 108x^3y^2 + 72x^2y^3 + 16xy^4,$$
$$-19x^3 + 54x^2y - 36xy^2 + 8y^3, \quad 8a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 19b^3.$$

Задатак 6.2.5. *Раставити на факторе помоћу разлике квадрата:*

$$(3x-2y)^4 - (2x+3y)^4, \quad (a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2,$$
$$4a^4 - 4b^4 + 9x^4 - 9y^4 - 12a^2x^2 + 12b^2y^2, \quad (18x^3 + 4y^3)^2 - (9x^3 - 5y^3)^2.$$

Задатак 6.2.6. *Раставити на факторе груписањем:*

$$a^2 + 5a - 6, \quad x^3 - 6x + 5, \quad x^5 + x^3y^2 + xy^4,$$
$$y^2 - y - 56, \quad 81a^4 + 4b^4, \quad a^8 + b^8 + a^4b^4.$$

Задатак 6.2.7. *Раставити на факторе* $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Раставање на факторе полинма (6.1) је непосредна помоћ у решавању полиномске једначине $p(x) = 0$ и обрнуто, познавање решења полиномске једначине учиниће факторизацију датог полинома тривијалном.

Међутим, не постоји згодна општа формула за израчунавање нултачака полинома вишег степена. Зато је растављање на факторе важно, а зато што је такав растав

увек могућ само у скупу реалних бројева проширеном са имагинарном јединицом $i = \sqrt{-1}$, ми требамо и комплексне бројеве.

Комплексан број је облика $z = x + iy$ гдје су $x = \Re(z)$ и $y = \Im(z)$ реални бројеви. Први се назива „реални део”, други „имагинарни део” комплексног броја z. Скуп комплексних бројева означавамо са $\mathbb{C}$.

Задатак 6.2.8. *Показати да за $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ важи:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1^2 + y_2^2}.$$

Према томе су збир, разлика, производ и количник комплексних бројева такође комплексни бројеви. Следећа важна и једноставна особина комплексних бројева је *коњуговање*. Број $\bar{z} = x - iy$ назива се коњугован броју $z = x + iy$.

Задатак 6.2.9. *Дати су комплексни бројеви $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Показати да за коњуговање важи:*
i. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, *ii.* $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
iii. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, *iv.* $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$, $z_2 \neq 0$.

Из ове особине следи да за реалан полином (6.1), коме је свако a_k реалан број, важи $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$. Према томе, ако је $z = z_0$ нултачка реалног полинома $p(x)$ онда му је $z = \bar{z}_0$ такође нултачка.

Производ коњуговано комплексних бројева је реалан број

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \tag{6.5}$$

Интензитет, односно *модуо* комплексног броја је $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Сада знамо раставити на факторе и оне полиноме (другог степена) које није могуће растављати у реалном домену.

Основна теорема алгебре[3] каже да сваки комплексан (са бар једним коефицијентом $a_k \in \mathbb{C}$) или реалан (са свим коефицијентима $a_k \in \mathbb{R}$) полином (6.1) има нултачку у скупу комплексних бројева $\mathbb{C}$. Другим речима, за сваки полином $P_n(z)$ степена $n \in \mathbb{N}$ постоји полином $P_{n-1}(z)$ за један нижег степена такав да је

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z), \quad z, z_0 \in \mathbb{C}, \tag{6.6}$$

гдје је $P_n(z_0) = 0$. Међутим, то је опште тврђење које важи такође и за полином $P_{n-1}(z)$, и тако даље, па је

$$P_n(z) = c(z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_{n-1}), \tag{6.7}$$

гдје сваки од $c, z, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ може бити комплексан број. То значи да се (у подручју комплексних бројева) сваки полином може раставити на линеарне факторе. Међутим, основна теорема алгебре не каже како.

[3] Доказ основне теореме алгебре је претежак за овај ниво.

Следећа, помоћна метода одређивања нула полинома, односно растављања полинома на факторе такође користи особину дељења (6.2), али са применом која која иде корак даље од претходне.

Примјер 6.2.10. *Одредити коефицијент b и преостале нуле плинома*

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + bx - 6$$

ако се зна да је 3 једна његова нултачка.

Рјешење. Дакле, знамо да је дати полином дељив са $x - 3$, па делењем $p : (x - 3)$ налазимо количник $s(x) = x^2 + b$ и остатак $r(x) = -6 + 3b$.

$$\begin{array}{l}
(\ \ x^3 - 3x^2 + bx\ - 6) : (x - 3) = x^2 + b + \dfrac{(-6+3b)}{x-3} \\
\underline{-x^3 + 3x^2} \\
\qquad\qquad bx\ - 6 \\
\qquad\quad \underline{-bx + 3b} \\
\qquad\quad (-6 + 3b)
\end{array}$$

Како је $r(x) \equiv 0$, то је $b = 2$, па је зато $s(x) = x^2 + 2$. У подручју комплексних бројева идемо до краја $s(x) = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$, гдје је $i = \sqrt{-1}$.

Према томе, дати полином је $p(x) = (x - 3)(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$, а његове нултачке су реални број 3 и два комплексна $\pm i\sqrt{2}$. □

Задатак 6.2.11. *Показати да се полином*

$$p(x) = 8x^4 - 8x^3 + 27x - 27$$

може написати у облику $p(x) = (x - 1)s(x)$, гдје је $s(x)$ неки полином трећег степена. Затим га раставите на факторе.

Задатак 6.2.12. *Израчунати вриједност израза:*
i. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$,
ii. $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

Решити једначину $p(x) = 0$ значи наћи (све) нултачке полинома $p(x)$, које тада називамо и коренима дате једначине.

Задатак 6.2.13. *Решити једначину:*
i. $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$,
ii. $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$.

Задатак 6.2.14. *Дата је једначина и један њен корен:*
i. $z^3 - z^2 - z - 15 = 0$, $z_1 = -1 + 2i$;
ii. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$, $z_1 = 2 - i$.
Одредити остале корене те једначине.

Задатак 6.2.15. *Наћи све полиноме* $p(x)$ *за које важи* $p(x^2) + p(x)p(x+1) = 0$.

Решити неједначину $p(x) > 0$ значи наћи све интервале (скупове) бројева x за које дати полином има позитивну вриједност. Границе тих интервала увек су реалне нултачке полинома.

Примјер 6.2.16. *Дат је полином* $p(x) = (x-1)(x-3)(x^2-x+1)$. *Наћи сва решења неједначине* $p(x) > 0$.

Рјешење. Производ три броја, фактора полинома $p(x)$ је позитиван ако су сва три позитивна, или је један позитиван а два негативна. То су четири могућности: $+++$, $--+$, $-+-$ и $+--$. Међутим, трећи фактор, трином

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

је увек позитиван. Према томе, остају само две могућности: $+++$ и $--+$.

Прва, систем неједначина: $x - 1 > 1$ и $x - 3 > 0$, који решава $x > 3$.

Друга, систем неједначина: $x - 1 < 0$ и $x - 3 < 0$, који решава x< 1.
Коначно рјешење је свако $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. □

Из овог примјера можемо приметити да неједнакости не важе за комплексне бројеве. Неједначине имају смисла само за полиноме са реалним коефицијентима, а тада их можемо решавати методама раније описаним (5.4 Неједначине). Када раставимо на факторе реални полином, фактори који су полиноми другог степена и не могу се даље растављати у реалном домену не мењају знак када променљива $(x \in \mathbb{R})$ пролази скупом реалних бројева.

Задатак 6.2.17. *Наћи сва решења неједначина:*
i. $(x+1)(x-5)(x^2+2x+3) < 0$, *ii.* $(2-x)(x+5)(x^2-3x+3) \le 0$,
iii. $(2-3x)(4-x)(3x^2-3x+1) \ge 0$, *iv.* $(5x-2)(3-7x)(3x^2+2x+1) > 0$.

На жалост, многи се случајеви неједначина не могу свести на ове рутине. То се види из следећих задатака, чије решавање употребите и за увежбавање сличних хеуристичких вештина.

Задатак 6.2.18. *Ако је* $a > x > 0$, *доказати да је*

$$\frac{a-x}{a+x} < \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}.$$

Задатак 6.2.19. *Ако су* x_1, x_2, x_3 *позитивни бројеви, доказати да је*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_1} + \frac{x_3}{x_1+x_2} \ge \frac{3}{2}.$$

У случајевима када нултачке нису цели, згодни бројеви, када не вреди нагађати, онда нам за полиномске једначине требају алгоритми. Линеарна је тривијална, али и за квадратну једначину постоји једноставно опште рјешење.

Задатак 6.2.20. *Показати да квадратна једначина* $x^2 + px + q = 0$ *има нултачке:*

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Општем полиному трећег степена $p_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ одговара кубна једначина $p_3(x) = 0$, која се у ретким случајевима може решавати растављањем на факторе.

Задатак 6.2.21. *Дат је полином:*
i. $y_1(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$*;*
ii. $y_2(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.
Раставити га на факторе, решити једначину $y(x) = 0$ *и скицирати граф полинома.*

Приметимо да граф сече апсцису у нутачкама датог полинома. За оне теже случајеве кубне једначине имамо Карданов[4] образац, помало непрактичан. То је поступак у два корака, од којих је први Чирнхаузова[5] трансформација.

Задатак 6.2.22 (Чирнхауз)**.** *Дат је полином* $p_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$*, са* $a_0 \neq 0$*. Показати да он сменом*

$$x = z - \frac{a_1}{3a_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}, \quad q = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{2a_1^3}{27a_0^3}$$

постаје $z^3 + pz + q = 0$.

Задатак 6.2.23. *Показати да Чирнхаузова трансформација:*
i. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ *своди на* $z^3 - 4z = 0$*;*
ii. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ *своди на* $z^3 - 7z + 6 = 0$.

Задатак 6.2.24 (Кардано)**.** *Показати да се једначина* $z^3 + pz + q = 0$ *сменом* $z = u + v$*, уз услов* $3uv + p$*, своди на систем:*

$$uv = -\frac{p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

који се може решити као квадратна једначина.

Једначине четвртог степена се још увек могу свести на кубне и решавати у најопштијим случајевима, али за једначине степена $n \geq 5$ сличне тзв. квадратуре не важе. Тада решења тражимо приближно, на потребан број тачних децимала.

[4] Girolamo Cardano (1501-1576), италијански математичар и лекар.
[5] Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651-1708), немачки математичар.

6.3 Матрице

Матрице[6] су простори бројева, попут:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 14 \\ -7 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -3 \\ 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Ове две матрице су исте врсте, реда 2×3, јер имају по 2 ретка и 3 колоне. Матрице су једнаке ако и само ако имају једнаке све одговарајуће коефицијенте. Овдје $a_{ij} = b_{ij}$, гдје је $i = 1,2$ редни број ретка а $j = 1,2,3$ број колоне.

Матрице сабирамо (одузимамо) тако што сабирамо (одузимамо) све одговарајуће коефицијенте у нову матрицу истог реда $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Множимо их са константом множећи сваки коефицијент. На примјер:

$$\hat{C} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{B} = \begin{pmatrix} 2\alpha - 5\beta & -3\alpha + 8\beta & 14\alpha - 3\beta \\ -7\alpha + 12\beta & 9\alpha & 6\beta \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Сабирамо само матрице истог типа, оне са једнаким бројем врста (редака) и колона.

Задатак 6.3.1. *Израчунати:*
i. $2\hat{A} + 3\hat{B}$, *ii.* $3\hat{A} - 2\hat{B}$,
за матрице (6.8).

Матрицу можемо множити са матрицом само ако прва има колона колико друга има врста:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times2} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{25} \end{pmatrix}_{2\times5} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & \cdots & a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & \cdots & a_{31}b_{15} + a_{32}b_{25} \end{pmatrix}_{3\times5} \tag{6.10}$$

Уопште, $\hat{A}_{m\times k}\hat{B}_{k\times n} = \hat{C}_{m\times n}$, при чему је коефицијент $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$.

Операција транспоновања матрица је замена њених колона и врста. Тако матрицу $\hat{B}$ из (6.8) транспонујемо у:

$$\hat{B}^T = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 8 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

Ову, посебно са $\hat{A}$, можемо множити у оба редоследа:

$$\hat{A}\hat{B}^T = \begin{pmatrix} -76 & 108 \\ 107 & -84 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}^T\hat{A} = \begin{pmatrix} -94 & 123 & 70 \\ 16 & -24 & 112 \\ -48 & 63 & -42 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

Множење матрица (углавном) није комутативно $\hat{A}\hat{B} \ne \hat{B}\hat{A}$, тамо гдје је могуће, али јесте асоцијативно $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$ и дистрибутивно $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$.

[6]енг. matrix - матрица, matrices - матрице

Задатак 6.3.2. *Израчунати производе:*
i. $\hat{A}^T\hat{B}$, *ii.* $\hat{B}\hat{A}^T$,
за матрице (6.8).

Сада погледајмо неке примјере из свакодневног живота да бисмо се уверили у корисност управо дефинисаних матричних операција.

Примјер 6.3.3. *Александра, Милица и Бранка су оствариле следећи просечан број бодова[7] на тестовима, пројектима, задаћама и усменим одговорима:*

ученик	*тестови*	*пројекти*	*задаће*	*усмени*
Александра	*92*	*100*	*89*	*80*
Милица	*72*	*85*	*80*	*75*
Бранка	*88*	*78*	*85*	*92*

Тестови чине 40% коначне оцене, пројекти 15%, задаће 25% а усмени 20%. Израчунати коначни успех ових ученица.

Рјешење 6.3.3. Множимо матрицу бодова (3×4) са матрицом (колоном) тежина и добијамо матрицу (колону) коначног успеха:

$$\begin{pmatrix} 92 & 100 & 89 & 80 \\ 72 & 85 & 80 & 75 \\ 88 & 78 & 85 & 92 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,15 \\ 0,25 \\ 0,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 77 \\ 87 \end{pmatrix}$$

Према томе, коначно Александра има 90 бодова, Милица 77, а Бранка 87. □

Примјер 6.3.4. *Снабдевач месечно доставља кафу у зрну[8] у продавнице A, B и C у паковањима од по 5, 10 и 15 килограма према следећој шеми:*

	5 kg	*10 kg*	*15 kg*
A	*50*	*100*	*30*
B	*60*	*150*	*40*
C	*80*	*200*	*70*

Цена паковања од 5, 10 и 15 килограма је 10,60 затим 17,20 и 22.50 долара редом. Израчунати помоћу матрица следеће.

i. Укупну цену једне доставе за поједине продавнице.

ii. У јуну, продавнице су добиле 15, 10 и 5 таквих достава редом. Колико је свака добила kg кафе?

iii. Колико је кафе снабдевач испоручио у јуну?

[7] Lisa Johnson: `www.shelovesmath.com/`

[8] Matrices Example 6: `https://youtu.be/3l57YYz8dC8`

Рјешење. i. Множимо матрицу количина $\hat{P}_{3\times3}$ по продавницама са матрицом цена $\hat{Q}_{3\times1}$ и добијамо укупну цену $\hat{R}_{3\times1}$ за поједине продавнице:

$$\hat{P}\hat{Q} = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 30 \\ 60 & 150 & 40 \\ 80 & 200 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10,6 \\ 17,2 \\ 22,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2925 \\ 4116 \\ 5863 \end{pmatrix} = \hat{R}$$

Дакле, достава у продавнице A, B и C кошта редом 2925, 4116 и 5863 долара.

ii. Множимо матрицу (типа 1×3) броја достава са матрицом ($\hat{P}_{3\times3}$) количина по достави и добијамо матрицу (типа 1×3) укупно достављених пакета по продавници :

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 100 & 30 \\ 60 & 150 & 40 \\ 80 & 200 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1750 & 4000 & 1200 \end{pmatrix}$$

Продавнице A, B и C су у јуну добиле редом 1750, 4000 и 1200 килограма кафе.

iii. Укупна количина испоручене кафе у све три продавнице је била:

$$\begin{pmatrix} 1750 & 4000 & 1200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (6950)$$

Снабдевач је у јуну доставио укупно 6950 килограма кафе. □

Приметимо да вектор можемо разумети као посебну матрицу, матрицу ретка или колоне. Опет специјални случајеви првих су тзв. *коваријантни*, а других *контраваријантни* вектори.

Квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ имају n редова и исто толико колона. Посебан случај квадратне матрице је јединична матрица $\hat{I}$ која на главној дијагонали (горе лево - доле десно) има јединице и све остале елемента нуле, рецимо:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

Квадратне матрице имају посебну вриједност која се назива детерминанта. За матрицу другог реда, то је број (5.15), односно:

$$\det\hat{A} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd. \tag{6.14}$$

Када (квадратна) матрица има детерминанту различиту од нуле, тада она има инверзну матрицу, са особинама:

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}. \tag{6.15}$$

Дакле, инверзна матрица је својој матрици реципрочна и са њом је комутативна. Посебно, за матрицу другог реда биће:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

што је лако проверити непосредним множењем.

Примјер 6.3.5. *Пекара је данас продала 75 колача и пита. Сваки колач је продат по 10 новчаних јединица, а свака пита по 15 н.ј. Ако је пекара данас касирала 910 н.ј. колико комада колача, а колико комада пита је продала?*

Рјешење. Нека је x_1 број продатих колача, а x_2 број продатих пита. Према условима задатка, имамо систем једначина:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 75 \\ 10x_1 + 15x_2 = 910 \end{cases}$$

који преводимо у матрични $\hat{A}\vec{X} = \vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 910 \end{pmatrix}$$

Детерминанта матрице $\hat{A}$ је $\det \hat{A} = 5$, па постоји инверзна матрица $\hat{A}^{-1}$. Множењем последње једначине са лева са $\hat{A}^{-1}$, добијамо $\vec{X} = \hat{A}^{-1}\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 910 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 215 \\ 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Према томе, пекара је продала $x_1 = 43$ колача и $x_2 = 32$ пите. □

Задатак 6.3.6. *Показати да се ротација (4.3) Декартовог правоуглог система Ox_1x_2 у Oy_1y_2 за угао ω може писати матрично $\hat{R}(\omega)\vec{X} = \vec{Y}$:*

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Показати да је $\hat{R}(\alpha + \beta) = \hat{R}(\alpha)\hat{R}(\beta)$ и протумачити резултат.

Задатак 6.3.7. *Проверити следећу репрезентацију матрице II реда:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i(a_{12} + a_{21})}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{a_{12} - a_{21}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i(a_{11} - a_{22})}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

гдје је i имагинарна јединица.

Према томе, свака матрица другог реда се може приказати као линеарна комбинација помоћу јединичне матрице $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и следеће три матрице:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

које се називају Паулијеве[9] матрице (в. [18]). На тај начин ове четири матрице чине базу (4-дим) векторског простора.

[9] Wolfgang Pauli (1900-1958), аустријско-швајцарски теоријски физичар.

Задатак 6.3.8. *Проверити да Паулијеве матрице (6.17) задовољавају једнакости:*
i. $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}_3^2 = \hat{I}$,
ii. $\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_3 = -\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_2 = i\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_3\hat{\sigma}_1 = -\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_3 = i\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 = -\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 = i\hat{\sigma}_3$.

Задатак 6.3.9. *Дата је матрица*

$$\hat{A}(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2-2a & 2a-1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Одредити: i. $\hat{A}(a)\hat{A}(b)$; *ii.* $\hat{A}^2$, $\hat{A}^3$, ..., $\hat{A}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Задатак 6.3.10. *Доказати да је*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 3^{2k} & 0 \\ 0 & 3^{2k} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} -3^{2k} & 2\cdot 3^{2k} \\ 4\cdot 3^{2k} & 3^{2k} \end{pmatrix},$$

за свако $k \in \mathbb{N}$.

Задатак 6.3.11. *Доказати да је*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix},$$

гдје је $n \in \mathbb{N}$.

Задатак 6.3.12. *Ако је* $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *доказати* $\hat{A}^n = \hat{A}^{n-2} + \hat{A}^2 - \hat{I}$, $n \ge 3$.

Карактеристична матрица квадратне матрице $\hat{A}$ реда n је матрица

$$\hat{A} - \lambda\hat{I} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Карактеристични полином квадратне матрице $\hat{A}$ реда n је полином који се добија израчунавањем детерминанте карактеристичне матрице $\hat{A} - \lambda\hat{I}$.

Задатак 6.3.13. *За матрицу* $\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *показати да је:*
i. карактеристична матрица $\hat{A} - \lambda\hat{I} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$,
ii. карактеристични полином $\det(\hat{A} - \lambda\hat{I}) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cd$,
iii. $\hat{A}^2 - (a+d)\hat{A} + (ad-bc)\hat{I} = \hat{0}$.

Овдје је $\mathrm{Tr}\,\hat{A} = a + d$ збир дијагоналних елемената матрице, који се назива *траг матрице*. Коефицијент $ad - bc$ уз јединичну матрицу је детерминанта матрице $\hat{A}$, а $\hat{0}$ је *нула матрица* чији су сви коефицијенти нуле.

Резултат (iii) претходног задатка није случајан. Кејли[10]-Хамилтонова[11] теорема каже да свака (квадратна) матрица поништава свој карактеристични полином.

Задатак 6.3.14. *Дата је матрица*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Показати да је:
i. $\det(\hat{A} - \lambda\hat{I}) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$,
ii. $\hat{A}^3 - 6\hat{A}^2 + 9\hat{A} - 4\hat{I} = \hat{0}$.

Када матрица $\hat{A}$ помножена ненултим вектором $\vec{X}$ даје колинеаран вектор:

$$\hat{A}\vec{X} = \lambda\vec{X}, \tag{6.19}$$

онда $\vec{X}$ називамо својствени, *сопствени* или карактеристични вектор[12] матрице $\hat{A}$. Скалар λ називамо својствена, сопствена или карактеристична вриједност[13] матрице $\hat{A}$ која одговара сопственом вектору $\vec{X}$.

Примјер 6.3.15. *Наћи сопствене векторе и сопствене вриједности матрица:*

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Рјешење. Решавамо једначину $\hat{M}\vec{X} = \lambda\vec{X}$, уопште:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x, \\ cx + dy = \lambda y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0, \\ cx + (d-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

То је хомогени линеарни систем једначина који има нетривијална решења, различита од $(0,0)$, акко је детерминанта $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тј. $\det(\hat{A} - \lambda\hat{I}) = 0$. Сопствене вриједности су нултачке карактеристичног полинома!

1. Сви ненулти вектори $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ који леже на апсциси су сопствени вектори матрице $\hat{M}_1$, са сопственом вредношћу $\lambda = 1$, јер се трансформишу у саме себе:

[10] Arthur Cayley (1821-1895), британски математичар
[11] William Rowan Hamilton (1805-1865), ирски математичар.
[12] eigenvector - сопствени вектор
[13] eigenvalue - сопствена вриједност

$\hat{M}_1\vec{X} = \lambda\vec{X}$. Сви ненулти вектори $\vec{Y} = \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ који леже на ординати се пројектују у нула векторе, па су и они својствени вектори исте матрице, са својственом вредношћу $\lambda = 0$: $\hat{M}_1\vec{Y} = 0\vec{Y} = \vec{0}$.

2. Сопствене вриједности и вектори матрице $\hat{M}_2$ су $\lambda = 4$ и $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, односно $\lambda = 2$ и $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, што је лако проверити множењем: $\hat{M}_1\vec{X} = \lambda\vec{X}$. □

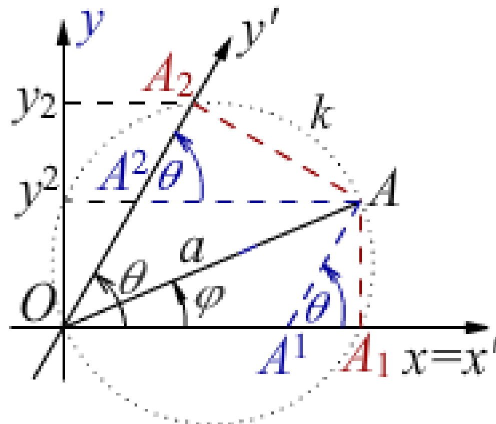
Задатак 6.3.16. *За матрицу*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

наћи сопствене вриједности и сопствене векторе.

Хајзенберг[14] је у периоду 1925-1927. године засновао Квантну механику на матрицама. Открио је да се квантна стања могу представљати нарочитим матрицама (са комплексним коефицијентима), да су сопствене вриједности тих матрица обзервабле (оне величине које физичар може мерити), а да су сопствени вектори квантне варијабле датог стања.

Формално, матрице су оператори, пресликавања, или функције. Користимо их за трансформације координата, разних координатних система. На слици 6.2 су Декартов правоугли Oxy и косоугли $Ox'y'$ систем координата, постављени тако да су им апсцисе заједничке, али $\theta = \angle x'Oy' \neq 90°$.



Slika 6.2: Коваријантне (A_1, A_2) и контраваријантне (A^1, A^2) координате.

Дата је тачка A са својим окомитим пројекцијама $AA_1 \perp Ox'$, $AA_2 \perp Oy'$ чија подножја $A_1 \in Ox'$, $A_2 \in Oy'$ називамо коваријантним координатама те тачке и паралелним пројекцијама $AA^1 \| Oy'$, $AA^2 \| Ox'$ чије додирне тачке са (косим) координатним осама називамо контраваријантним координатама. Нека су $\varphi = \angle x'OA$ и $a = \overline{OA}$.

[14]Werner Heisenberg (1901-1976), немачки теоријски физичар.

Задатак 6.3.17. *Показати да важе трансформације координата на слици 6.2:*

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2\theta} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\theta \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

гдје су A_1 и A_2 коваријантне, а A^1 и A^2 контраваријантне координате $\overrightarrow{OA}$.

Када је угао између координатних оса прав $\theta = 90^\circ$, тада је $\cos\theta = 0$, па разлике између ко и контра-варијантних координата исчезавају.

Задатак 6.3.18. *На слици 6.2 показати да важе трансформације:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ -\cos\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}$$

косоуглих у правоугле Декартове координате тачке A.

Задатак 6.3.19. *На слици 6.2 показати, ако је растојање између две тачке Δs а:*

i. разлике њихових контраваријантних кордината Δx и Δy, тада је:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \cos\theta.$$

ii. разлике њихових коваријантних кордината $\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{y}$, тада је:

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}[(\Delta\bar{x})^2 + (\Delta\bar{y})^2 - 2 \cdot \Delta\bar{x} \cdot \Delta\bar{y} \cdot \cos\theta].$$

Ове методе даље воде у тензорски рачун, нееуклидске геометрије или Ајнштајнову теорију релативности. У специјалној теорији[15] *Лоренцове трансформације* се такође пишу и матрично:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Систем K' се креће брзином v у односу на K дуж апсциса, x и x' оса које се поклапају, и временских ордината: $\tau = ict$ и $\tau' = ict'$, са брзином светлости c.

Задатак 6.3.20. *Показати да за трансформације (6.20) важи:*

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sin\theta = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

гдје је $i = \sqrt{-1}$ имагинарна јединица.

[15] Специјална релативност: www.academia.edu/11888432/

6.4 Рационални изрази

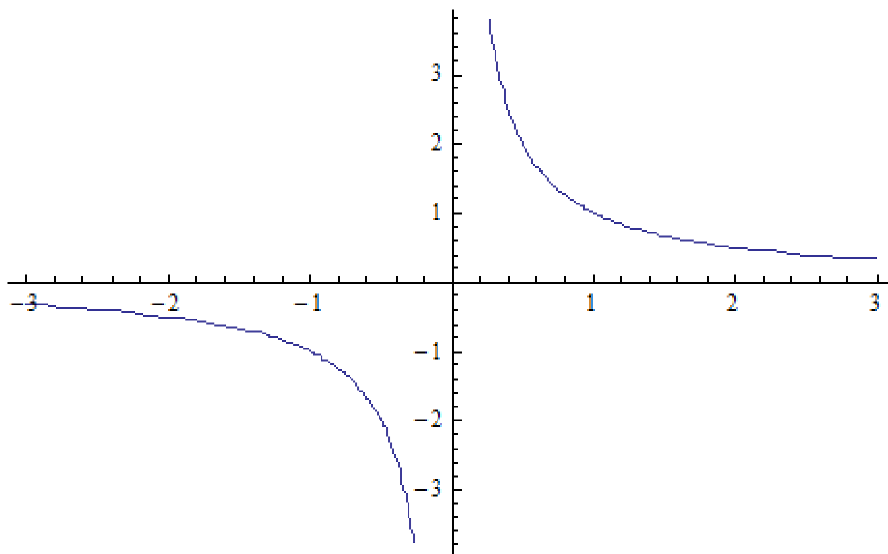
Разломљени изрази бројева садрже константе и операције сабирања, одузимања, множенња и делења. Израз формиран од константи и променљивих помоћу наведених операција назива се разломљени рационални или само *рационални израз*, а често и алгебарски израз.

вриједност променљиве за коју је рационални израз дефинисан назива се *домен* или подручје дефинисаности. Скуп свих вриједности које рационални израз може имати назива се *кодомен* или подручје вриједности. вриједности променљивих за које израз има нулту вриједност називају се *нултачке* или нуле израза. Знак израза је предзнак (плус или минус) израза за дате, једну или више променљивих.

Посебна врста израза је *функција*, која за једну задату вриједност променљиве (променљивих) има највише једну вриједност.

Примјер 6.4.1 (Хипербола)**.** *Испитати и нацртати функцију* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Рјешење. Домен је скуп $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, таквих $x \in D$ да $f(x)$ има дефинисану вриједност. Скуп тих вриједности је кодомен $K = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Функција нема нула, $(\forall x \in D)\ f(x) \neq 0$. Знак функције је плус за $x > 0$, а минус за све остале x из домена. Функција је хипербола, као што се види на слици 6.3. □



Slika 6.3: Хипербола $f(x) = \frac{1}{x}$.

Приметимо да се гране хиперболе на слици 6.3 приближавају координатним осама, лево и десно апсциси, а горе и доле ординати. Права којој се граф приљубљује али је у далеким тачкама не додирује, назива се *асимптота* графа.

Примјер 6.4.2. *Ротирати хиперболу из претходног примјера, за* $\omega = -45°$.

Рјешење. Ротирамо (4.3) $Oxy \to Ox'y'$ уназад за $\omega = 45°$, користећи формуле:

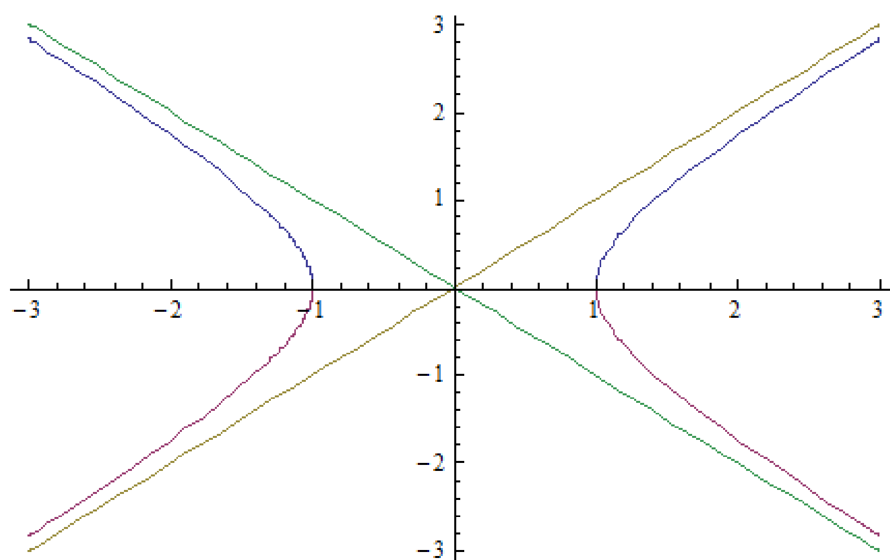
$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega, \quad y = x'\sin\omega + y'\cos\omega.$$

Смењујемо дате изразе и $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ у израз $xy = 1$, редом:

$$(x'\cos 45° - y'\sin 45°)(x'\sin 45° + y'\cos 45°) = 1,$$

$$(x' - y')(x' + y') = 1,$$

односно $(x')^2 - (y')^2 = 1$. То је претходна хипербола, сада у тзв. *канонском* облику који није функција, са асимптотама $y = \pm x$, на слици 6.4. □



Slika 6.4: Хипербола $x^2 - y^2 = 1$.

Примјер 6.4.3. *Испитати и нацртати функцију* $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Рјешење. Домен је скуп $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, што се види из називника $x - 1 \neq 0$. Кодомен је скуп $K = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, што се види након „сређивања":

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \neq 1.$$

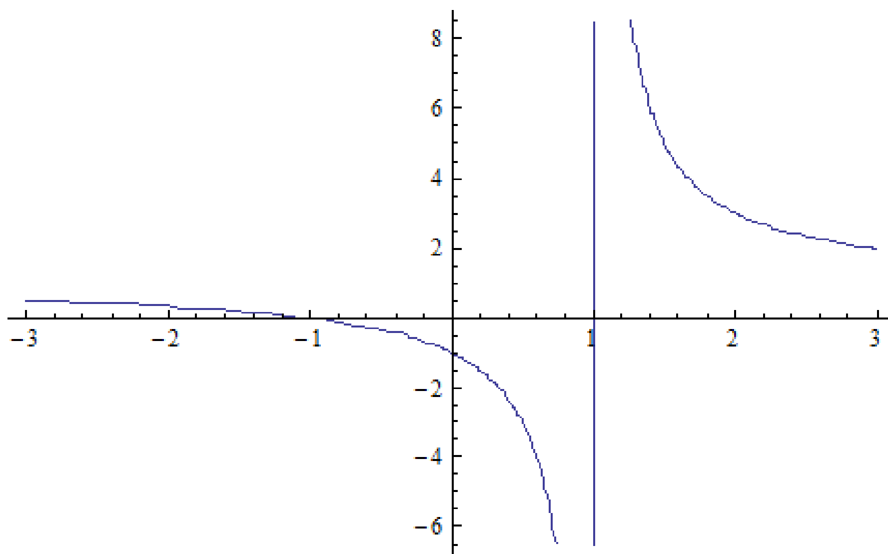
Нула функције је једино $x = -1$, место гдје граф додирује или сече апсцису, за разлику од тачке $y(0) = -1$ гдје граф сече ординату. Функција је позитивна када су оба, бројник и називник, истог знака:

$$x + 1 > 0 \ \land \ x - 1 > 0 \quad \lor \quad x + 1 < 0 \ \land \ x - 1 < 0,$$

$$x > -1 \ \land \ x > 1 \quad \lor \quad x < -1 \ \land \ x < 1,$$

$$x > 1 \quad \lor \quad x < -1.$$

Према томе, за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ је функција позитивна, а за $x \in (-1, 1)$ је негативна. Граф је на слици 6.5. □



Slika 6.5: Граф функције $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Са графа 6.5 се види да и функција $y = \frac{x+1}{x-1}$ има асимптоте, вертикалну $x = 1$ и хоризонталну апсцису, тј. праву $y = 0$. Рационалне функције имају вертикалне осе у нултачкама називника.

Задатак 6.4.4. *Испитати и нацртати функције:*

$$i.\ y = \frac{2x+3}{3x-2}, \quad ii.\ y = \frac{5x-1}{x+2}, \quad iii.\ y = \frac{3-4x}{1-5x}, \quad iv.\ y = \frac{3x+2}{4x+1}.$$

Задатак 6.4.5. *Испитати и нацртати функције:*

$$i.\ y = \frac{4x^2-9}{x^2-1}, \quad ii.\ y = \frac{x^2-1}{4x^2-9}.$$

У оквиру ове области су и увежбавања рада са рационалним изразима, укључујући и понављања лекција из основне школе[16], као у следећих неколико задатака.

Задатак 6.4.6. *Израчунај вриједност израза:*

$i.$ $\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{2}{3} - \left(-0,25 + \frac{15}{28}\right) - 0,5\right] + \frac{5}{6}\right\} + \frac{1}{24}$,

$ii.$ $\frac{59}{124} + \left(4\frac{1}{4} - 3\frac{1}{6}\right) : \left(1\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) - 0,25 : 0,125$.

[16] нпр. `http://ucislobodno.com/`

Задатак 6.4.7. *Израчунај:*

$$i.\ \left(a+b+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right):\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2},\quad ii.\ \frac{a-2}{a-4}\cdot\left(\frac{4a}{a^2-4}+\frac{6}{6-3a}+\frac{a}{a+2}\right).$$

Задатак 6.4.8. *Израчунај:*

$$i.\ \frac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}},\quad ii.\ \frac{x+y-\frac{4xy}{x+y}}{\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}},\quad iii.\ \frac{x^3-1}{1+\frac{1}{x-\frac{x}{x+1}}}.$$

Задатак 6.4.9. *Поједностави:*

$$i.\ \frac{a^2-ab+bc-c^2}{b^2-a^2-2ac-c^2},\quad ii.\ \frac{a^4-2a^2+1}{a^3-a^2-a+1},\quad iii. \frac{a^3+b^3}{a-b+\frac{ab}{a-b}}-\frac{a^3-b^3}{a+b-\frac{ab}{a+b}}.$$

Задатак 6.4.10. *Поједностави:*

$$i.\ \frac{x^3+y^3+x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)}{x^3-y^3+x(y^2+z^2)-y(x^2+z^2)},\quad ii.\ \frac{x^3+y^3+x^2(y+z)+y^2(x+z)}{x^3-y^3+x^2(y+z)-y^2(x+z)}.$$

Задатак 6.4.11. *Упростити израз:*
i. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$,
ii. $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$.

Задатак 6.4.12. *Раставити на збир парцијалних разломака:*

$$r_1(x)=\frac{2x^3-x^2+x-4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)},\qquad r_2(x)=\frac{2x^4-x^3-11x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}.$$

Потсетимо се косинусне теореме 3.4.27 и хармонијске средине (2.14) у следећа два задатка.

Задатак 6.4.13. *Ако је*

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)},$$

доказати да је $(x+1)(y+1)=2$.

Задатак 6.4.14. *Нека је* $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. *Доказати да је тада:*

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right).$$

Знамо да степен разлике бројева није једнак разлици степена тих бројева, али постоје изузеци тог правила, када је детерминанта (6.14) нула.

Задатак 6.4.15. *Доказати да из* $ad = bc$ *следи:*

$$i.\ \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}, \qquad ii.\ \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4-b^4}{c^4-d^4}, \qquad iii.\ \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^n = \frac{a^n-b^n}{c^n-d^n},$$

уз услове $bd(a-b)(c-d) \ne 0$.

Задатак 6.4.16. *Доказати да из пропорције*

$$\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = a : b : c$$

следи:

$$i.\ a : b : c = x : y : z, \qquad ii.\ \frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^3}{c^2} = \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}.$$

Задатак 6.4.17. *Доказати да за позитивне бројеве* a, b, c *важе неједнакости:*

$$i.\ \frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}, \qquad ii.\ \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

У ову групу долази и задатак 6.2.19, заједно са следећим.

Задатак 6.4.18. *Доказати да за позитивне бројеве* a, b, c *важи неједнакост*

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Задатак 6.4.19. *Решити систем једначина:*

$$\frac{xy}{x+y} = a, \quad \frac{xz}{x+z} = b, \quad \frac{yz}{y+z} = c,$$

за $a, b, c \ne 0$.

Задатак 6.4.20. *Решити систем једначина:*

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a}, \quad \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b},$$

за $a, b \ne 0$.

Решења

Логика

Рјешење 1.1.1. ⊤; ⊥; ⊤; ⊥. □

Рјешење 1.1.4. Скраћене таблице импликације и еквиваленције су:

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\iff$	1	0
1	1	0
0	0	1

Тражене формуле су:

$$a \Rightarrow b = b \vee \bar{a}, \quad a \iff b = (b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee \bar{b}),$$

односно:

$$a \Rightarrow b = b + \bar{a}, \quad a \iff b = (b + \bar{a}) \cdot (a + \bar{b}).$$

Еквиваленција $a \iff b$ је исто што $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$. □

Рјешење 1.1.5. Дисјункција и конјункција: $p \vee q = \neg p \Rightarrow q$ и $p \wedge q = \neg(p \Rightarrow \neg q)$. □

Решње 1.1.6. i. Ако је он популаран, онда је он добар тенисер (конверзија). Ако он није добар тенисер, онда он није популаран (инверзија). Ако он није популаран, онда он није дибар тенисер (контрапозиција). □

Рјешење 1.1.8. i. У првим колонама су све могуће комбинације тачности датих варијабли, а у следећим су делови дате формуле. У последњој колони је коначни резултат.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$\Rightarrow$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

Дата табела је доказ прве формуле, а слично се доказују и остале три.

ii. Импликација је нетачна једино када је претпоставка тачна, а последица нетачна. Тражимо тај случај и доказујемо да он не постоји.

У првој импликацији, претпоставка је $(p \Rightarrow q) = \top$, а последица $(\neg p \lor q) = \bot$. Из последице добијамо $p = \top$ и $q = \bot$, што уврштено у претпоставку даје контрадикцију $(\top \Rightarrow \bot) = \top$. Слично доказујемо и у остале три импликације. □

Рјешење 1.1.10. Попуњавамо таблицу истинитости. У посљедњој колони је сваки одговор "нетачно", $\bot$.

x	y	$\neg x$	$\neg x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y)$	F
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$

Према томе, формула $F = \neg(x \Rightarrow (\neg x \Rightarrow y))$ је логички неистинита. □

Рјешење 1.1.11. Таблица истинитости је:

x	y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$	f
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Према томе, формула $f = (x \Rightarrow y) \land (y \Rightarrow x)$ је некад тачна (први и четврти ред), а некада лажна (други и трећи). □

Решења 1.1.12. i. нетачно, ii. тачно, iii. нетачно, iv. неодређено. □

Рјешења 1.1.13. a. тачно, b. тачно, c. неодређено, d. тачно. □

Рјешење 1.1.14. B □

Рјешење 1.1.15. D □

Рјешење 1.1.16. C □

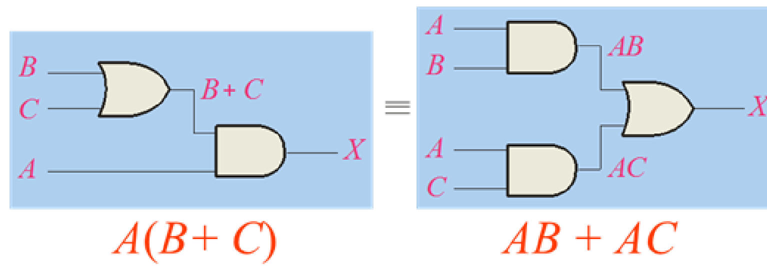
Рјешење 1.1.17. Вељко □

Рјешење 1.1.18. Замените коње. □

Рјешење 1.1.19. Хоће ли твој брат рећи да ти говориш истину? Брат који лаже, на ово питање одговориће "да", а брат који говори истину одговориће "не". □

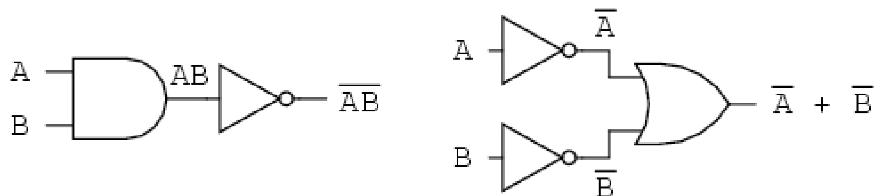
Рјешење 1.1.20. На слици 6.6 лево види се да струја тече од A, B, или C до X, када је укључен прекидач A и бар један од B и C. То исто је на десној слици.

□



Slika 6.6: Дистрибуција конјункције по дисјункцији.

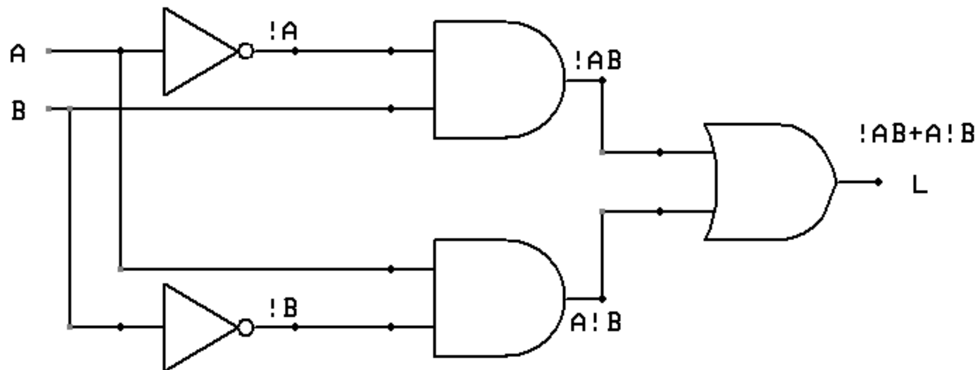
Рјешење 1.1.21. На слици 6.7 приказане су ел. шеме за Деморганов закон конјункције. Пратите улазе и излазе за сваку од четири комбинације 0 и 1.



Slika 6.7: Деморганов закон $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$.

Слично урадите за Деморганов закон дисјункције. □

Рјешење 1.1.22. Негације A и B на слици 6.8 означавамо са $!A$ и $!B$.



Slika 6.8: $L = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$

□

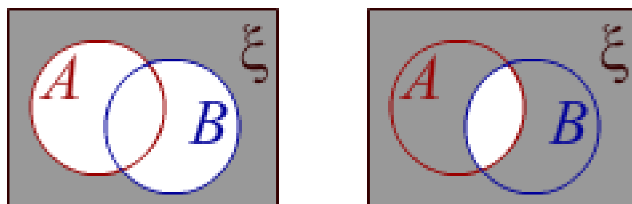
Рјешење 1.1.23. $Q = AB + BC(B + C)$. □

Рјешење 1.1.26. Прва значи да је дати низ конвергентан, а друга да је након неког броја m константан. □

Рјешење 1.1.27. $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\ mn > p$. □

Скуп

Рјешење 1.2.2. 8. Обе стране, првог и другог Де Моргановог закона резултирају Веновим дијаграмима на слици 6.9. □



Slika 6.9: $(A \cup B)'$ и $(A \cap B)'$.

Рјешење 1.2.4. Из дисјунктних растава:

$$A \cup B = A \cup (A' \cap B), \quad (A' \cap B) \cup (A \cap B) = B,$$

следи да је број елемената:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(A' \cap B), \quad n(A' \cap B) + n(A \cap B) = n(B),$$

а отуда

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

што је и требало доказати. □

Рјешење 1.2.5. Из претходног задатка 1.2.4 добијамо, редом:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 16 + 21 - 32 = 5,$$

гдје је A скуп ученика који уче њемачки језик, а B који уче енглески. Према томе, оба језика у том разреду учи пет ученика. □

Рјешење 1.2.6. Израчунавамо, редом:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 45 + 33 - 62 = 16.$$

Дакле, 16 особа је попило кафу са другим пићем. □

Рјешење 1.2.7. Имамо, редом:

$$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A),$$

$$48 = 15 + 12 + n(B \setminus A),$$

$$n(B \setminus A) = 21.$$

Затим имамо:

$$n(B) = n(A \cap B) + n(B \setminus A) = 12 + 21 = 33.$$

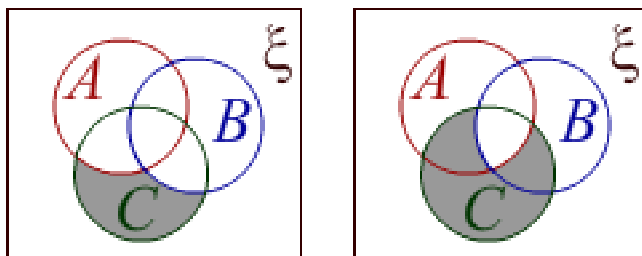
Дакле, $n(B) = 33$. □

Рјешење 1.2.8. Нека су E и F скупови лица која говоре енглески и француски редом. Тада је $n(E) = 82$, $n(F) = 65$, $n(E \cup F) = 120$. Даље је:

$$n(E \cap F) = n(E) + n(F) - n(E \cup F) = 82 + 65 - 120 = 27.$$

Затим, из $n(E) = n(E \setminus F) + n(E \cap F)$ сљеди $n(E \setminus F) = n(E) - n(E \cap F) = 82 - 27 = 55$ и $n(F \setminus E) = n(F) - n(E \cap F) = 65 - 27 = 38$. Дакле, број лица који говоре само енглески је $n(E \setminus F) = 55$, број лица која говоре само француски је $n(F \setminus E) = 38$, а број лица која говоре оба језика је $n(E \cap F) = 27$. □

Рјешење 1.2.10. Венови дијаграми прве и друге једнакости су на слици 6.10. □



Slika 6.10: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Рјешење 1.2.12. Дато је $n(A) = 40$, $n(B) = 32$, $n(C) = 29$, $n(A \cup B \cup C) = 56$ и $n(A \cap B \cap C) = 4$. На основу задатка1.2.11 имамо, редом:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

$$56 = 40 + 32 + 29 - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + 4,$$

$$56 = 105 - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C),$$

$$n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) = 49.$$

Према томе, 49 такмичара су добили медаље у по двије категорије. □

Рјешење 1.2.13. Имамо редом:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

$$49 = 21 + 27 + 29 - 8 - n(A \cap C) - 14 + 3,$$

$$49 = 58 - n(A \cap C),$$

$$n(A \cap C) = 9.$$

То значи да девет лица игра прву и трећу игру.

$$n[(A \cap B) \setminus C] = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 8 - 3 = 5.$$

Дакле, пет лица игра прву и другу али не и трећу игру. □

Рјешење 1.2.14. Налазимо редом:

$$|F \cup H \cup M| = |F| + |H| + |M| - |F \cap H) - |F \cap N| - |H \cap M| + |F \cap H \cap M|,$$

$$|F \cup H \cup M| = 60 + 24 + 17 - 12 - 8 - 3 + 1,$$

$$|F \cup H \cup M| = 79, \quad 120 - 79 = 49.$$

Према томе, студената који нису кандидати нити за један од предмета има 41. □

Рјешење 1.2.15. Опет, имамо редом:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 70 + 140 - 40 - 30 - 60 + 10,$$

$$|A \cup B \cup C| = 190, \quad 200 - 190 = 10.$$

Дакле, 10 кандидата нема нити један од уређаја. □

Доказ 1.2.16. Претпоставимо супротно. Тада је $A \subset C$, али $A \not\subset B$ и $A \not\subset C$. Тада мора бити $A = B$ и $B = C$, а отуда $A = C$, што је у контрадикцији са претпоставком да је A прави потскупC. □

Доказ 1.2.17. Нека је $(a,c) \in A \times C$. Тада је $a \in A$, па због $A \subseteq B$ имамо $a \in B$. Слично, из $c \in C$ и $C \subseteq D$ произилази $c \in D$. Према томе, $a \in B$ и $c \in D$, па је $(a,c) \in B \times D$. Отуда $A \times C \subseteq B \times D$. □

Доказ 1.2.18. Нека је $(x,y) \in (A \cup B) \times C$. Тада $x \in A \cup B$, па $x \in A$ или $x \in B$. Због симетрије је свеједно, а претпоставимо да је прво тачно. Тада, из $y \in C$ сљеди $(x,y) \in (A \times C)$, па $(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Отуда закључак да је

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C).$$

Обратно, нека је $(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Тада $(x,y) \in A \times C$ или $(x,y) \in (B \times C)$. Узмимо да је прво од ових симетричних тачно. Тада је $x \in A$ и $y \in C$. Како је

$A \subseteq A \cup B$, биће и $x \in A \cup B$. Према томе је $(x,y) \in (A \cup B) \times C$, па можемо закључити да је
$$(A \times C) \cup (B \times C) \subseteq (A \cup B) \times C.$$
Дакле, лијева страна је потскуп десне, а десна је потскуп лијеве, што значи да су оба скупа једнака, што је и требало доказати. □

Доказ 1.2.19. Скуп на лијевој страни једнакости је
$$(A \cap B) \times C = \{(x,z) | (x \in A \wedge x \in B) \wedge (z \in C)\}.$$
Из еквиваленције
$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge (z \in C) \iff [(x \in A) \wedge (z \in C)] \wedge [(x \in B) \wedge (z \in C)]$$
сљеди $[(x,z) \in (A \times C)] \wedge [(x,z) \in (B \times C)]$, а отуда
$$(x,z) \in [(A \times C) \cap (B \times C)],$$
што значи да се (у оба смјера) произвољан елеменат једне стране налази и на другој страни једнакости. То значи да је скуп лијево једнак скупу десно. □

Доказ 1.2.20. Пре свега, разлика скупова A и B према дефиницији је скуп
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$
Даље имамо еквиваленције: $\forall (x,z) \in (A \setminus B) \times C \iff$
$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge z \in C \iff$$
$$(x \in A \wedge z \in C) \wedge (x \notin B \wedge z \in C) \iff$$
$$(x,z) \in (A \times C) \wedge (x,z) \notin (B \times C) \iff$$
$$(x,z) \in (A \times C) \setminus (B \times C).$$
Отуда тражена једнакост. □

Рјешење 1.2.21. Број куће је 14, а деца имају по 3, 3 и 8 година.

Наиме, сви могући раставиa 72 на три фактора су:
$$1 \cdot 8 \cdot 9\ (18), \quad 2 \cdot 2 \cdot 18\ (22), \quad 2 \cdot 3 \cdot 12\ (17), \quad 2 \cdot 4 \cdot 9\ (15),$$
$$2 \cdot 6 \cdot 6\ (14), \quad 3 \cdot 3 \cdot 8\ (14), \quad 3 \cdot 4 \cdot 6\ (13).$$
Пописивач то може израчунати и зна број куће, али је збуњен. То значи да је број куће 14, једини дупли резултат: једно дијете има 2 године, а два старија близанца по 6, или два млађа близанца имају по 3 године а најстарије дијете 8. Затим пописивач сазнаје да постоји најстарије дијете. Према томе, број куће је 14, а дјеца имају по 3, 3 и 8 година. □

Рјешење 1.2.22. Само две. Треба окренути прву (А) и трећу (4) карту. □

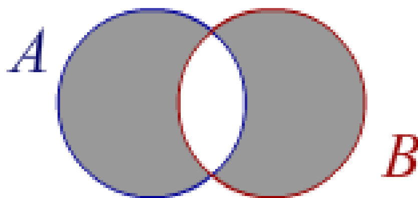
Рјешење 1.2.24. i. Израчунавамо скупове, редом:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\},\ A \cap B = \{3,4\}, \quad A \setminus B = \{1,2\},\ B \setminus A = \{5,6\};$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1,2,5,6\}, \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1,2,5,6\},$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

ii. Обе стране једнакости резултирају Веновим дијаграмом на слици 6.11.



Slika 6.11: Симетрична разлика скупова $A \oplus B$.

iii. Користећи $X \setminus Y = X \cap Y'$ □

Доказ 1.2.25. Користимо принцип математичке иднукције.

Први корак. Треба проверити тачност T_1. За $n = 1$, имамо само један непаран број (јединицу) и збир $1 = 1^2$, па је тврђење T_1 тачно. Иако није потребно, приметимо да су такође тачна и тврђења T_2 и T_3, за следећа два случаја $n = 2$ и $n = 3$, јер је $1 + 3 = 2^2$ и $1 + 3 + 5 = 3^2$.

Други корак. Треба доказати импликацију $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Када кажемо да је тачно тврђење T_n за неко $n = 1, 2, 3, \dots$, то овдје значи да важи једнакост

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Додајући обема странама ове једнакости следећи непаран број $(2n + 1)$, добијамо

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1).$$

Збир на десној страни је квадрат бинома $(n+1)^2$. То значи да је тачно и тврђење T_{n+1}. Према томе, доказали смо импликацију $T_n \Rightarrow T_{n+1}$, односно други корак индукције.

Зато је увек

$$1 + 2 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Тиме је доказ математичком индукцијом завршен. □

Доказ 1.2.26. i. Први корак индукције је тривијалан, $T_1 :\ 2 = 1 \cdot (1 + 1)$. У другом кораку, претпоставци $T_n :\ \sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$ додамо $2(n+1)$ на обе стране једнакости и добијамо (еквивалентну једнакост) последицу $T_{n+1} :\ \sum_{k=1}^{n+1} 2k = (n + 1)(n + 2)$.

ii. Општи члан низа је $3k - 2$. У другом кораку, додамо $3n + 1$.

iii. Други корак, следи из: $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \ge (2n + 1) + 2n + 1 = 2n + 2 + 2n \ge 2n + 2 + 2 + 1 = 2(n + 1) + 1$.

iv. Следи из $n! \ge 2^n$ почев од $n = 4$, и $(n+1)! = n!(n+1) \ge 2^n(n+1) \ge 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$. □

Доказ 1.2.27. Користимо принцип математичке индукције.

Када је $A = \emptyset$, тј. празан скуп, тада је број елемената $n(A) = 0$. Партитативни скуп је $\wp(A) = \{\emptyset\}$, тј. једночлан, па је дата једнакост тачна. За једночлани скуп $A = \{a_1\}$, биће $n(\wp(A)) = n(\{\emptyset, \{a_1\}\}) = 2$, па је дата једнакост опет тачна. За $A = \{a_1, a_2\}$ је $\wp(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$, па опет имамо тражену једнакост, јер $n(\wp(A)) = 4 = 2^2 = 2^{n(A)}$. У случају трочланог скупа A, партитативни скуп (1.3) има $8 = 2^3$ елемената.

Уопште, нека су дати скуп $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ са $n = 1, 2, 3, \dots$ елемената и његов партитативни скуп са 2^n елемената. Када бисмо скуп A увећали за још један елемент a_{n+1}, тада би он имао $n + 1$ елемената. Његов партитативни скуп бисмо морали увећати тако да сваком потскупу (елементу претходног $\wp$) додамо по још један потскуп увећан за тај нови елемент a_{n+1}. Тиме би се партитативни скуп тачно удвостручио, па би број елемената постао $2 \cdot \wp = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. □

Рјешење 1.2.28. Означимо наведене активности редом са A, B, C, D. Дато је:

$$A \cup D \subseteq B, \quad C \subseteq D, \quad B \cap C \subseteq A.$$

Отуда је C потскуп сва три скупа B, C и D па је елемената тог скупа, тј. оних који се баве јогом, најмање. Сва три скупа A, C и D су потскупови B, што значи да је највише оних који се баве трачањем, то је скуп B. □

Упутство 1.2.29. У тренутку пуцања, човек је тачно на северном полу, а медвед гдје год да је, јужно је. На северном полу живе бели медведи. □

Рјешење 1.2.30. Резултати су дати у табели:

Норвежанин	жута	Данхил	вода	мачка
Данац	плава	Бленд	чај	коњ
Британац	црвена	Пал Мал	млеко	птице
Немац	зелена	Принц	кафа	риба
Швеђанин	бела	Блу Мастер	пиво	пас

□

Релације

Рјешење 1.3.5. Лако налазимо, алфабетски и низ стрелице:

$$\rho = \{(a,a), (a,b), (b,f), (d,e), (d,f), (e,e), (f,b), (f,c)\},$$

$$\rho^{-1} = \{(a,a), (b,a), (f,b), (e,d), (f,d), (e,e), (b,f), (c,f)\}.$$

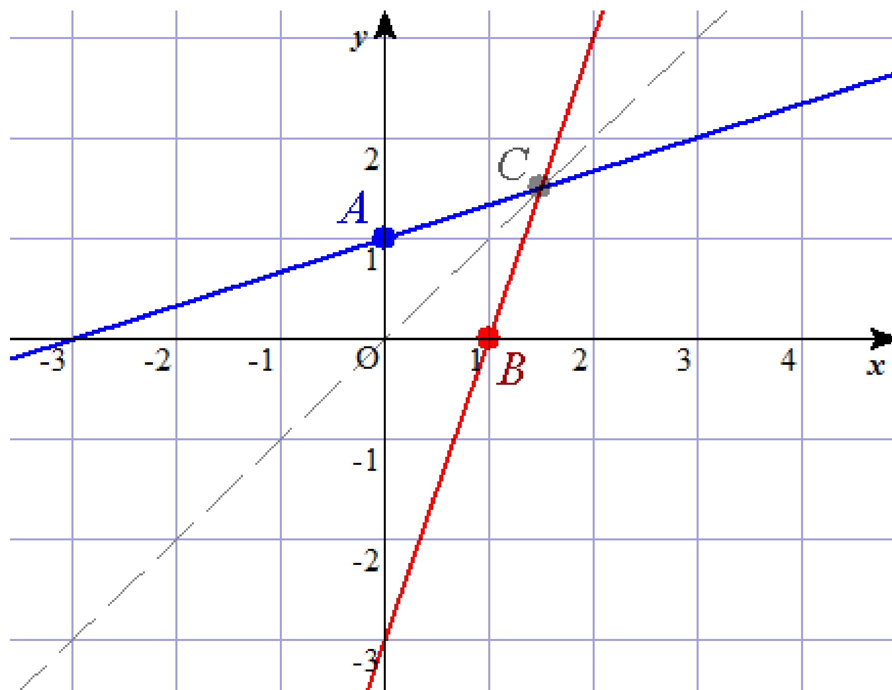
□

Рјешење 1.3.6. Релација ρ је скуп уређених парова (x,y), при чему је:

$$x \in \{1,2,4,7,14,28,49,98,196\}, \quad y \in \{1,3,5,9,15,25,45,75,225\}.$$

Инверзна релација ρ^{-1} је скуп истих парова у обрнутом поретку (y,x). □

1.3.7. Израчунавамо ординату $y = \frac{1}{3}x+1$ као пар (произвољним) апсцисама и цртамо тачку по тачку (x,y) у Декартовом правоуглом систему Oxy. Добијамо плаву линију AC на слици 6.12. Затим израчунавамо инверзно $x = 3y-3$ и дефинишемо инверзну релацију $y = 3x-3$ за граф инверзне релације, која је на истој слици представљена црвеном правом BC. Испрекидана сива линија OC је симетрала I и III квадранта, односно права $y = x$. То је оса симетрије тачака скупова ρ и ρ^{-1}. □

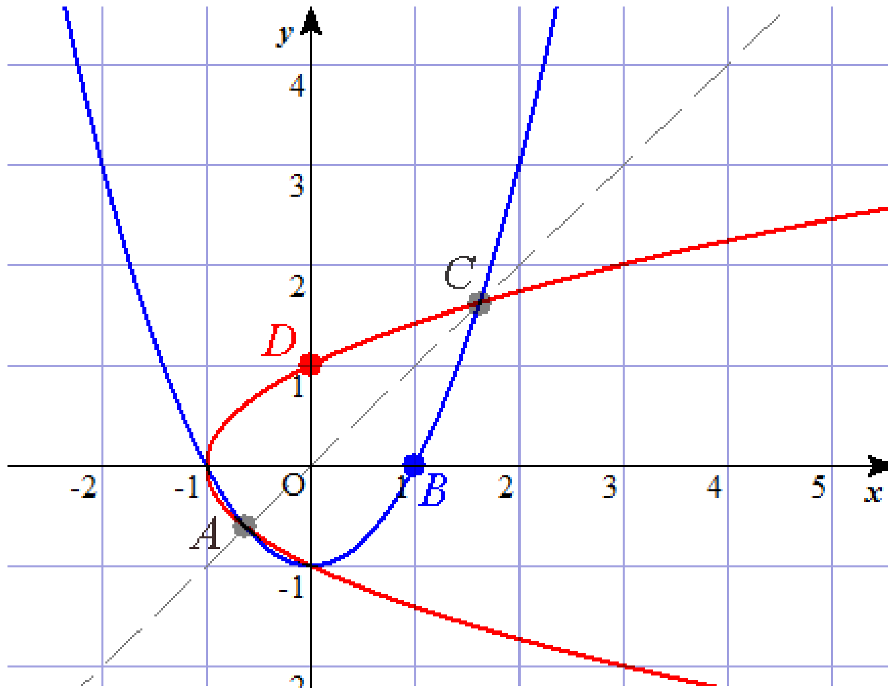


Slika 6.12: Граф релације $\rho : y = \frac{1}{3}x+1$ и инверзне $\rho^{-1} : y = 3x-3$.

Рјешење 1.3.8. Да би нацртали праву $y = 2x-2$ довољно је знати њене две тачке, рецимо $A'(1,0)$ и $B'(2,2)$. Она је инверзна правој $y = \frac{1}{2}x+1$, представљеној на слици 1.10 десно. На тој слици B и ово B' су иста тачка. То је тачка симетрале $y = x$. □

Рјешење 1.3.9. Цртајући тачке релације ρ, као што су $A(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $B(1,0)$ или $C(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ на слици 6.13, добијамо плаву параболу на тој слици. Из једнакости $y = x^2-1$ добијамо инверзне једнакости $x = \pm\sqrt{y+1}$, затим $y = \pm\sqrt{x+1}$ које дефинишу инверзну релацију ρ^{-1}, црвени граф. Тачке A и C леже на симетрали $y = x$,

испрекиданој сивој линији графа, па зато припадају и инверзној релацији, заједно са тачком $D(0,1)$. □



Slika 6.13: Граф релације ρ.

Доказ 1.3.15. a. За свако $y \in \rho(A)$ постоји неко $x \in A$ такво да је $x\rho y$. Како је $A \subseteq B$ биће $x \in B$. Отуда $y \in \rho(B)$, што значи $\rho(A) \subseteq \rho(B)$.

b. За свако $y \in \rho(A \cup B)$ постоји неко $x \in A \cup B$ такво да је $x\rho y$. Ако $x \in A$, тада $y \in \rho(A)$. Ако $x \in B$, тада $y \in \rho(B)$. У оба случаја $y \in \rho(A) \cup \rho(B)$. Отуда $\rho(A \cup B) \subseteq \rho(A) \cup \rho(B)$.

Обратно, из a. следи да $\rho(A) \subseteq \rho(A \cup B)$ и $\rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$, те је $\rho(A) \cup \rho(B) \subseteq \rho(A \cup B)$.

c. Следи из a. да $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(A)$ и $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(B)$. Отуда $\rho(A \cap B) \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$. □

Доказ 1.3.16. Ако је $x\rho_1 y$, тада је $y = \rho_1(x)$. Због $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, имамо $y \in \rho_2(x)$. Слично, из $x\rho_2 y$ следи $x\rho_1 y$. Према томе $\rho_1 = \rho_2$. □

Доказ 1.3.21. Од два узастопна броја један је паран. Од три узастопна броја један је дељив са 3. Од четири узастопна броја један је дељив са 4. Дакле, од четири узастопна броја два су парна, а један од њих је дељив и са 4, док је један дељив са три. Њихов производ је дељив са 24, јер је $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. □

Доказ 1.3.22. Из $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$, због прва три фактора, следи да је дати број дељив са 6. Ако је број $n = 5k \pm 1$, онда је $n-1, n$ или $n+1$ дељиво са 5, а ако је облика $n = 5n \pm 2$, онда је $n^2 + 1 = (5n \pm 2)^2 + 1 = 25n^2 \pm 20n + 5$, што је такође дељиво са 5. Према томе, дати број је дељив са $6 \cdot 5 = 30$. □

Доказ 1.3.23. Приметимо да је $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$. Бројеви $n+7$ и $n-4$ су или оба дељиви са 11, или није ниједан. Како $11|33$ и $121 \not| 33$ у првом случају је први сабирак датог броја дељив са 121, а други није, а у другом случају је други сабирак дељив са 11, а први није. □

Рјешење 1.3.24. НЗД[17] за бројеве 35 и 65 је 5 килограма. Треба 7 гајби по 5 kg зелених јабука и 13 гајби по 5 kg црвених јабука. □

Доказ 1.3.25. Користимо Еуклидов алгоритам дељења (примјер 1.3.20). Математичком индукцијом доказујемо да се сваки остатак r_k у еуклидском алгоритму за $\text{NZD}(a,b)$ може изразити као $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ за неке $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}$. Заиста, то је тачно за саме бројеве $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$ и $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$, као и за $r_1 = a - q_1 b = 1 \cdot a + (-q) \cdot b$. Зато претпоставимо да важи $r_{k-1} = \alpha_{k-1}a + \beta_{k-1}b$ и $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ за неке целе α и β. Тада је $r_{k+1} = r_{k-1} - q_{k+1}r_k = (\alpha_{k-1} - q_{k+1}\alpha_k)a + (\beta_{k-1} - q_{k+1}\beta_k)b$, па је сада довољно дефинисати $\alpha_{k+1} = \alpha_{k-1} - q_{k+1}\alpha_k$ и $\beta_{k+1} = \beta_{k-1} - q_{k+1}\beta_k$. Посебно је $\text{NZD}(a,b) = r_n = \alpha_n a + \beta_n b$ са $\alpha = \alpha_n$ и $\beta = \beta_n$ траженим коефицијентима □

Рјешење 1.3.26. Најмањи заједнички садржалац датих бројева је $\text{NZS}(33,39) = 429$. Према томе, након 429 минута први аутомобил направиће тачно 13, а други 11 кругова, након чега ће се оба наћи на почетној линији. □

Рјешење 1.3.27. Рефлексивност: Тривијално, за свако $a \in S$ из $(a,a) \in \rho$, заменом првог и другог a следи да је $(a,a) \in \rho^{-1}$.

Симетрија: Претпоставка је да $(\forall a, b \in S)\ (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$. Међутим, $(a,b) \in \rho^{-1} \iff (b,a) \in \rho$, а због произвољности a, b следи $(a,b) \in \rho^{-1} \Rightarrow (b,a) \in \rho^{-1}$.

Транзитивност: Из $(\forall a,b,c \in S)\ (a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$ следи:

$$(b,a) \in \rho^{-1} \wedge (c,b) \in \rho^{-1} \Rightarrow (c,a) \in \rho^{-1},$$

$$(c,b) \in \rho^{-1} \wedge (b,a) \in \rho^{-1} \Rightarrow (c,a) \in \rho^{-1},$$

а то је транзитивност ρ^{-1}. Релација еквиваленције је РСТ. □

Резултат 1.3.29. a. не, b. не, c. да, d. не, e. не. □

Доказ 1.3.33. Ако су a и b конгруентни по модулу m, тада се они могу писати у облику $a = \alpha m + r$ и $b = \beta m + r$, гдје $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Отуда:

i. $a = b + (\alpha - \beta)m$; ii. $a - b = (\alpha - \beta)m$; iii. рефлексивност: $a - a = 0 \cdot m$, симетрија: $b - a = -(\alpha - \beta)m$, транзитивност: сабирањем са додатним $b - c = (\beta - \gamma)m$ добијамо $a - c = (\alpha - \gamma)m$. □

[17] НЗД - највећи заједнички дијелилац.

Доказ 1.3.34. Ако су a и b конгруентни по модулу m, тада се они могу писати у облику $a = \alpha m + r_1$ и $b = \beta m + r_1$, гдје $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Слично $c = \gamma m + r_2$ и $d = \delta m + r_2$, гдје остаци r_1 и r_2 не морају бити једнаки.

i. Из $ax + cy = (\alpha x + \gamma y)m + r_1 x + r_2 y$ и $bx + dy = (\beta x + \delta y)m + r_1 x + r_2 y$ одузимањем налазимо да је разлика $(ax + cy) - (bx + dy)$ дељива са m.

ii. $ac - bd = (\alpha\gamma - \beta\delta)m^2 + (\alpha - \beta)r_2 m + (\gamma - \delta)r_1 m$, а то је дељиво са m.

iii. $a - b = (\alpha - \beta)m = (\alpha - \beta)\lambda n$, а то је број дељив са n. □

Упутство 1.3.35. Следи из вишеструке употребе претходног1.3.34 ii. □

Рјешење 1.3.37. Из $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$ следи

$$2^{2010} = (2^6)^{335} \equiv (-1)^{335} \equiv -1 \pmod{13}.$$

Отуда $2^{2011} = 2 \cdot 2^{2010} \equiv 2 \cdot (-1) = -2 \equiv 11 \pmod{13}$. Дакле, број 2^{2011} при делењу са 13 даје остатак 11. □

Функције

Рјешење 1.4.4. Функције су прва три (горе), први и трећи граф доле. Граф функције у Декартовом систему препознајемо тзв. „вертикалним тестом“. Ако произвољна вертикална (на апсцису) сече граф највише једном, тада је релација функција. □

Рјешење 1.4.11. Графове цртамо грану по грану, за сваку од функција:

$$f(x) = |x-1| - 1 = \begin{cases} (x-1)-1, & x-1 \ge 0 \\ -(x-1)-1, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \ge 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases},$$

$$g(x) = |x+1| - 1 = \begin{cases} (x+1)-1, & x+1 \ge 0 \\ -(x+1)-1, & x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \ge -1 \\ -x-2, & x < -1 \end{cases}.$$

Графови су на слици 6.14. Композиције су:

$$h_1(x) = g[f(x)] = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge -1 \\ -f(x)-2, & f(x) < -1 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \ge 1 \\ -x, & x \in [-1,1) \\ -x+2, & x < -1 \end{cases},$$

$$h_2(x) = f[g(x)] = \begin{cases} g-2, & g \ge 1 \\ -g, & g < 1 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \ge 1 \\ -x, & x \in [-1,1) \\ x+2, & x < -1 \end{cases}.$$

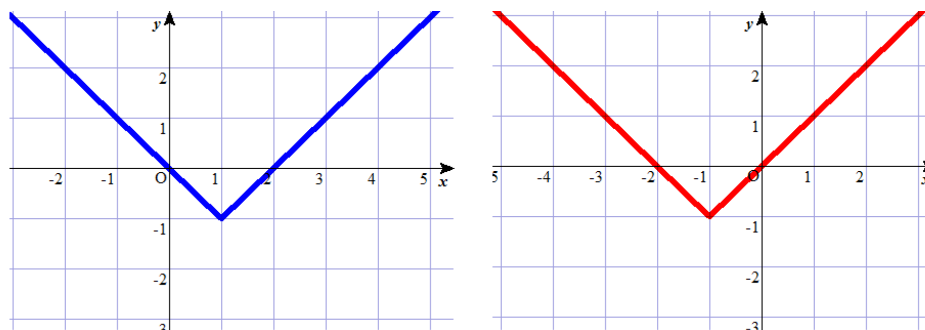
□

Рјешење 1.4.14. Из $x^2 - 4 \ge 0$ следи $(x-2)(x+2) \ge 0$, односно $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Из $4 - x^2 > 0$ следи $(2-x)(2+x) \ge 0$, односно $x \in [-2, 2]$.

Из $x^2 + 4x \ge 0$ следи $x(x+4) \ge 0$, односно $x \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$.

Из $4x^2 - 12x \ge 0$ следи $x(x-3) \ge 0$, односно $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$. □



Slika 6.14: Функције $f,g = |x \mp 1| - 1$.

Рјешење 1.4.15. Из $\frac{x-1}{x+2} > 0$ следи $(x-1)(x+2) > 0$, па $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$.

Из $\frac{x+1}{x-2} < 3$ следи $\frac{x+1}{x-2} - 3 < 0$, односно $\frac{-2x+7}{x-2} < 0$, или $(-2x+7)(x-2) < 0$, па $x \in (-\infty,-\frac{7}{2}) \cup (2,\infty)$.

Из неједначина $-1 \le \frac{1-4x}{5}$ и $\frac{1-4x}{5} \le 1$ следи $-5 \le 1-4x \le 5$, затим $-6 \le -4x \le 4$, а отуда $\frac{3}{2} \ge x \ge -1$, односно $x \in [-1,\frac{3}{2}]$.

Из $x^2 - 2x - 3 \le 0$ следи $(x+1)(x-3) \le 0$, па $x \in (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$.

Имамо систем две неједначине $0 \le x^2 + 4x$ и $x^2 + 4x \le 5$. Прва је еквивалентна са $x(x+4) \ge 0$, па $x \in (-\infty,-4] \cup [0,\infty)$. Друга са $x^2+4x-5 \le 0$, односно $(x-1)(x+5) \le 0$, па $x \in [-5,1]$. Пресек дозвољених интервала је коначно $x \in [-5,-4] \cup [0,1]$.

Систем неједначина $0 \le 4x^2-12x+8$ и $4x^2-12x+5 \le 0$ еквивалентан је са системом $0 \le (x-1)(x-2)$ и $(2x-5)(2x-1) \le 0$. Прву решава $x \in (-\infty,1] \cup [2,\infty)$ а другу $x \in [\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$. Коначно рјешење је пресек $x \in [2,\frac{5}{2}]$. □

Доказ 1.4.16. i. Тривијално.

ii. Ако је $y \in f(A_1 \cup A_2)$, тада је $y = f(x)$ за неко x које припада бар једном од скупова A_1, A_2. Отуда, y је елеменат бар једног од скупова $f(A_1), f(A_2)$, што значи и њихове уније $f(A_1) \cup f(A_2)$. Обрнуто, ако y припада овој унији, припадаће бар једном од скупова $f(A_1), f(A_2)$, тако да је $y = f(x)$. Дакле, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

iii. Из $y \in f(A_1 \cap A_2)$ следи да је $y = f(x)$ за неко x које лежи у оба скупа A_1, A_2. Отуда је y елемент оба скупа $f(A_1), f(A_2)$, па је и елемент њиховог пресека $f(A_1) \cap f(A_2)$. □

Доказ 1.4.17. i. Тривијално.

ii. Ако је $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, онда $f(x)$ припада $B_1 \cup B_2$, односно бар једном од скупова B_1 и B_1. Дакле, x је елеменат бар једног од скупова $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)$, па тиме и њихове уније $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Обрнуто, ако x припада њиховој унији, припадаће бар једном од скупова $f^{-1}(B_1)$ и $f^{-1}(B_2)$, те ће у бар једном од скупова B_1, B_2 постојати неко y такво да је $x \in f^{-1}(y)$. Али, тада $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

iii. Доказ је формално исти као под ii, ако свуда унију заменимо пресеком, а израз „бар један“ изразом „и један и други“.

iv. Из $x \in f^{-1}(C_Y B)$ следи да је $y = f(x)$ за неко $y \in C_Y B$. Тада $y \notin B$, па $x \notin f^{-1}(B)$, што значи $x \in C_X f^{-1}(B)$. Обрнуто, из $x \in C_X f^{-1}(B)$ следи $x \notin f^{-1}(B)$,

па у B нема елемента y за који би важило $y = f(x)$. Како f пресликава X у Y, то у $C_y B$ мора постојати y такво да је $y = f(x)$, што значи да $x \in f^{-1}(C_Y B)$. □

1.4.18. i. Претпоставимо да важи $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ за све потскупове из X и да функција није бијекција. То значи да постоје $x_1, x_2 \in X$ такви да је $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$. Нека је $A_1 = \{x_1\}$ и $A_2 = \{x_2\}$. Из $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ следи $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. Међутим $f(A_1) \cap f(A_2) = \{y\} \neq \varnothing$, што значи $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$, тј. контрадикцију.

Обратно, претпоставимо да је дата функција бијекција. Нека су A_1 и A_2 непразни подскупови из X. Нека $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Тада је $y = f(x)$ за неко $x \in A_1 \cap A_2$, па је $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Отуда прва инклузија $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Затим, нека је $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Тада $y \in f(A_1)$ и $y \in f(A_2)$, тј. $y = f(x_1) = f(x_2)$ за неке $x_1, x_2 \in X$. Како је функција бијекција, из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1 = x_2$. Отуда друга инклузија $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$. Последица обе инклузије је $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

ii. Видети примјер 1.4.19. □

Доказ 1.4.24. Методом математичке индукције, први корак. Тврђење T_1, за $n = 1$, је очигледно тачна неједнакост $f(x_1) \le f(x_1)$. Приметимо да је тврђење T_2, за случај $n = 2$, такође тривијално, јер је то сама дефиниција конвексних функција, а да за T_3 имамо примјер 1.4.22.

Други корак индукције, доказујемо импликацију $(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Нека је за неки природни број n дата неједнакост тачна за све $k = 1, 2, \dots, n$. Тада је, редом:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})\frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j}{\lambda_2 + \dots + \lambda_n} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right)$$

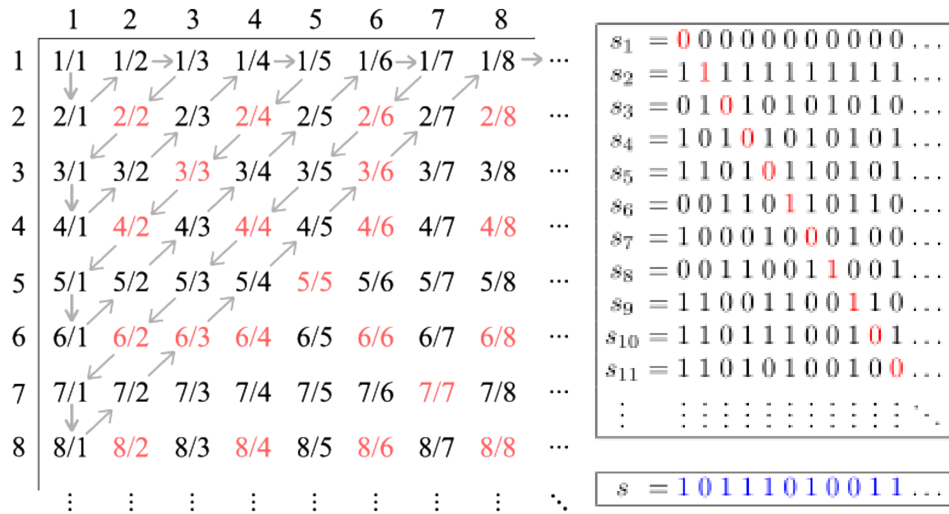
$$\le (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j.$$

Према томе, $(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n \Rightarrow T_{n+1}$, чиме је дато тврђење доказано методом математичке индукције. □

Рјешење 1.4.25. i: $2, 4, 6, \dots$. ii: $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. iii. в. слику 6.15 лево. Формирамо бесконачну матрицу која садржи све позитивне разломке, облика m/n, гдје је m редак а n колона. Матрицу „пребројавамо“ дијагонално дуж стрелица сиво означених на слици, не узимајући бројеве (црвено) који се понављају. Затим на начин (ii) комбинујеме ове позитивне разломке $\mathbb{Q}^+$ са нулом и негативним $\mathbb{Q}^-$, добијајући елементе скупа свих рационалних бројева $\mathbb{Q}$ у једном низу. □



Slika 6.15: Пребројавање $\mathbb{Q}$ и непребројивост $\mathbb{R}$

Доказ 1.4.26. Кантор[18] је следећи дијагонални поступак објавио 1891, као доказ да не постоји бијекција између природних и реалних бројева. Посматрајмо скуп S свих бесконачних низова бинарних цифара 0 и 1. Доказујемо да је такав скуп непребројив методом контрадикције.

Нека је $s_1, s_2, s_3, \dots$ произвољан низ таквих низова, као на слици 6.15 десно. Претпоставимо да се у том низу налазе сви могући низови бинарних цифара. Затим формирајмо низ s узимајући (дијагонално) по једну, k-ту цифру $k = 1, 2, 3, \dots$ из s_k и мењајући је у супротну (заменом 0 у 1, или обратно). Низ s се не налази у низу $s_1, s_2, s_3, \dots$, јер се s разликује од s_1 по првој цифри, разликује се од s_2 по другој, од s_3 по трећој, и тако даље, s се разликује од s_k по k-тој цифри. То је контрадикција са претпоставком да низ $s_1, s_2, s_3, \dots$ садржи све бинарне низове.

Како није могуће поредати у један низ све (бинарне) бројеве из интервала $(0, 1)$, то поготово није могуће са свим реалним бројевима. □

Цели бројеви

Рјешење 2.1.2. Развијамо број у збир потенција $n_b = b_n b^n + b_{n-1} b^{n-1} + \dots + b_1 b^1 + b_0 b^0$, гдје је $b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0$ запис датог броја n_b у датој бази b.

$100011_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 35.$

$4307_8 = 4 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 2247.$

$BC12_{16} = 11 \cdot 16^3 + 12 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 = 48146.$ □

Рјешење 2.1.6. $K_{11} = 2^{11} - 2 = 2046 = 11 \times 186$, $K_{12} = 4094 = 341 \times 12 + 2$.

[18] Georg Cantor (1845-1918), њемачки математичар, један од оснивача теорије скупова.

Број $2^{30}-1$ је дељив[19] са $2^{10}-1=1023=3\cdot 341$, па $341|(2^{11}-2)$ и[20] $341|[(2^{31})^{11}-2^{11}]$. Отуда $341|[(2^{31})^{11}-2^{11}]=341|[(2^{31})^{11}-2^{11}+2^{11}-2]$. Из $(2^{31})^{11}-2^{11}=[(2^{31})^{11}-2^{11}]+[2^{11}-2]$ следи да 341 дијели $K_{341}=2^{341}-2$. □

Доказ 2.1.10. а. За $n=1$ дати број $A_1=4^2+2=18$ јесте дељив са 3. Претпоставимо да је за неко $n\ge 1$ дати број A_n дељив са 3. Тада због:

$$A_{n+1}=4^{n+3}+2=4^2(4^{n+1}+2)-6=16A_n-16\cdot 2+2=16A_n-2\cdot 15$$

је такође дељив са 3.

b. За $n=1$ дати број $3\cdot 4^2+10^0-4=45$ јесте дељив са 9. Претпоставимо да је дати број дељив са 9 за неко n и означимо га са B_n. Tada, због:

$$B_{n+1}=3\cdot 4^{n+2}+10^n-4=4\cdot 3\cdot 4^{n+1}+10\cdot 10^{n-1}-4$$

$$=4(3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4)+6\cdot 4^{n+1}+3\cdot 4,$$

$$B_{n+1}=4B_n+6A_n$$

је такође дељив са 9. □

Рјешење 2.1.11. а. За $n=0$ је $2^0>0$ тачно. Саберимо претпоставку $2^n>n$ и очигледну неједнакост $2^n\ge 1$, добијамо неједнакост $2^{n+1}>n+1$, па је доказ индукцијом завршен.

b. За $n=5$ имамо $2^5>5^2$, што је тачно. Сабирањем претпоставке $2^n>n^2$ и неједнакости $2^n>2n+1$ следи последица $2^{n+1}>(n+1)^2$. □

Рјешење 2.1.14. Користимо Еуклидов алгоритам дељења:

$$\begin{array}{rcl} & & \\ 455 &=& 1\cdot 385+70,\\ 385 &=& 5\cdot 70+35,\\ 70 &=& 2\cdot 35+0. \end{array}\qquad \begin{array}{rcl} 996 &=& 1\cdot 918+78,\\ 918 &=& 11\cdot 78+60,\\ 78 &=& 1\cdot 60+18,\\ 60 &=& 3\cdot 18+6,\\ 18 &=& 3\cdot 6+0. \end{array}$$

Дакле, NZD(455, 385) = 35 и NZD(996, 918) = 6. Трећи NZD(2247, 2033) = 107. □

Резултат 2.1.16. 1, 23, 15. □

Резултат 2.1.19. i : NZD(12, 32) = 4, ii: NZS(12, 42) = 84.

iii: NZD(12, 32, 42) = 2, iv: NZS(12, 32, 42) = 672. □

[19] разлика кубова $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ за $a=2^{10}$ и $b=1$

[20] в. задатак 1.3.34, конгруенције

Рјешење 2.1.24. Помоћу Еуклидовог алгоритма тражимо нзд:

$$\begin{aligned} 258 &= 1 \cdot 147 + 111, \\ 147 &= 1 \cdot 111 + 36, \\ 111 &= 3 \cdot 36 + 3, \\ 36 &= 3 \cdot 12. \end{aligned}$$

Дакле, $\text{NZD}(258, 147) = 3$. Како $3|369$, једначина има рјешење. Затим разлажемо број 3 на линеарну комбинацију 258 и 147 користећи претходни Еуклидов алгоритам:

$$3 = 111 - 3 \cdot 36 = 111 - 3(147 - 111) = 4 \cdot 111 - 3 \cdot 147$$

$$= 4(258 - 147) - 3 \cdot 147 = 4 \cdot 258 - 7 \cdot 147,$$

$$3 = 4 \cdot 285 - 7 \cdot 147 \quad / \times 123$$

ову једначину множимо са 123 зато што је $3 \times 123 = 369$, па добијамо

$$492 \cdot 258 + (-861) \cdot 147 = 369.$$

Према томе, једно рјешење је

$$x_0 = 492, \quad y_0 = -861.$$

Сва друга решења имају облик $x = x_0 - 147z/3$, $y = y_0 + 258z/3$, тј.

$$x = 492 - 49z, \quad y = 86z - 861,$$

гдје је $z \in \mathbb{Z}$ произвољан цели број. Преласком на нову променљиву $z = t + 10$, иста решења се поједностављују:

$$x = 2 - 49t, \quad y = 86t - 1,$$

гдје је t произвољан цели број. □

Рјешење 2.1.25. За прву са лева, решења су $x = 169 + 35z$, $y = -468 - 97z$, гдје је z произвољан цели број. Друга нема (целобројних) решења. Решења треће ($\forall z \in \mathbb{Z}$) су $x = -2 + 5z$, $y = 6 - 14z$. □

Разломци

Рјешење 2.2.5. Казаљке ће се поклопити након $45 + x = 49,09$ минута. Наиме, из $(45 + x) : 60 = x : 5$, следи $x = 45/11 \approx 4,09$ min.

Централни угао сата између 10 и 2 је $\phi = 360° \cdot \frac{4}{12} = 120°$. У десет и десет велика казаљка ће бити на броју 2, а мала ће прећи 2/12 дела пута од 10 до 11, који је опет 1/12 пуног круга од 360°. Према томе, тражени угао је $\phi - \frac{2}{12 \cdot 12} \cdot 360° = 115°$. □

Рјешење 2.2.7. Означимо $x = 0,444\dots$, па је $10x = 4,44\dots$, тј. $10x = 4 + x$. Отуда $x = \frac{4}{9}$.

Означимо $x = -56,789789789\dots$ и $y = 0,789789789\dots$. На претходни начин добијамо $1000y = 789,789789\dots$, тј. $1000y = 789 + y$, а отуда $y = \frac{999}{789}$, па

$$x = -56 + y = -56 + \frac{999}{789} = -\frac{14\,395}{263}.$$

□

Рјешење 2.2.8. $\frac{13}{12} = 1,08333\dots$; $3,1666\dots$; $5,24999\dots$; $7,333\dots$. □

Рјешење 2.2.9. $12,012_3 = 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 + 0\cdot 3^{-1} + 1\cdot 3^{-2} + 2\cdot 3^{-3} = 5,18519$. Обратно, израчунавамо (количник и остатак) редом: $5 = 12_3$ и $0,18519 = 0,012_3$.

$5:3$	=	1	2	$0,18519\cdot 3$	=	$0,55557$
$1:3$	=	0	1	$0,55557\cdot 3$	=	$1,66671$
$0:3$	=	0	0	$0,66671\cdot 3$	=	$2,00013$

□

Рјешење 2.2.10. Множимо број (резултат) базом b и узимамо цифре[21] испред зареза.

$0,456\cdot 2$	=	$0,912$	$0,456\cdot 8$	=	$3,648$	$0,456\cdot 16$	=	$7,296$
$0,912\cdot 2$	=	$1,824$	$0,648\cdot 8$	=	$5,184$	$0,296\cdot 16$	=	$4,736$
$0,824\cdot 2$	=	$1,648$	$0,184\cdot 8$	=	$1,472$	$0,736\cdot 16$	=	$1,472$
$0,648\cdot 2$	=	$1,296$	$0,472\cdot 8$	=	$3,776$	$0,472\cdot 16$	=	$11,776$
$0,296\cdot 2$	=	$0,592$	$0,776\cdot 8$	=	$6,208$	$0,776\cdot 16$	=	$12,416$
$0,592\cdot 2$	=	$1,184$	$0,208\cdot 8$	=	$1,664$	$0,416\cdot 16$	=	$6,656$
$0,184\cdot 2$	=	$0,368$	$0,664\cdot 8$	=	$5,312$	$0,656\cdot 16$	=	$10,496$
$0,368\cdot 2$	=	$0,736$	$0,312\cdot 8$	=	$2,496$	$0,496\cdot 16$	=	$7,936$

Добијамо: $0,01110100_2$, $0,35136152_8$, $0,741BC6A7_{16}$. То су првих 8 цифара иза зареза у бази $b = 2,8,16$ декадног броја 0,456. □

Рјешење 2.2.11. $0,999\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 0,111\dots_2$ то је број 1.

$0,4999\dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 0,1_2$ или $0,111\dots_2$, а то је број 1/2.

$0,111\dots = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 0,000111000111\dots_2$ то је број 1/9.

$0,0714285714285\dots = \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} + \dots = 0,0001001001\dots_2$, број 1/14. □

Рјешење 2.2.12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$. □

Рјешење 2.2.14. Број 201500 подељен са 77 даје остатак 68. Зато $xy = 09 = 77-68$. □

Рјешење 2.2.15. Ако се дати разломак може скратити са 9, онда су збирови цифара бројника и називника дељивиса 9, тј $9|(2a+b+6)$ и $9|(a+2b)$. Међутим, $a,b = 0,1,\dots,9$ па су једине могућности $a = 2$ и $b = 8$. Дати разломак је 22248/828 и он се може скратити са 36, добија се 618/23. □

[21] 10, 11, 12, 13, 14 и 15 хексадецимално пишемо A, B, C, D, E и F.

Рјешење 2.2.18. Разлажемо дати разломак на једноставније сабирке:

$$i.\ \frac{35z+9}{15z+4} = \frac{2(15z+4)+(5z+1)}{15z+4} = 2 + \frac{5z+1}{15z+4} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{5z+1}},$$

а разломак $1/(5z+1)$ је редукован.

$$\frac{14z+3}{21z+4} = \frac{1}{\frac{21z+4}{14z+3}} = \frac{1}{1+\frac{7z+1}{14z+3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{7z+1}}},$$

а разломак $1/(7z+1)$ је редукован. □

Доказ 2.2.19. Претпоставимо супротно, да дати разломак није редукован и да се може писати у облику ak/bk гдје су a, b и k цели бројеви, али $k > 1$. Тада имамо систем једначина:

$$\begin{cases} 13z+6 = ak, \\ 11z+5 = bk. \end{cases}$$

Прву множимо са 11, а другу са 13 па одузимамо. Добијамо

$$1 = (11a - 13b)k.$$

Контрадикција, јер производ целог броја у загради и $k > 1$ не може бити 1. □

Рјешење 2.2.20.

$$\frac{\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{100}{125}+\frac{7}{5}\frac{7}{11}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(\frac{15}{10}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{55}} = \frac{\frac{22}{55}+\frac{49}{55}-\frac{15}{55}}{\left(\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{55}} = \frac{56\cdot 4}{7} = 32.$$

□

Рјешење 2.2.21. $= \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-5)} = \frac{2x-1}{3x+1}.$ □

Рјешење 2.2.22. $= \left[\frac{a+1}{(a+2)(a-2)} + \frac{1-a^2}{(a+2)(a^2-2a+4)}\right]\cdot(a^2-2a+4) = \frac{(a+1)(a^2-2a+4)+(1-a^2)(a-2)}{(a+2)(a-2)}$
$= \frac{(a+1)(a^2-2a+4-a^2+3a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{a+1}{a-2}.$ □

Рјешење 2.2.23. $= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)^2(x-y)} + \frac{2yx-2y^2-xy}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} = 1.$ □

Рјешење 2.2.24. $= \frac{a^3+a^2+a-a^3-1}{a(a-1)(a^2+a+1)}\cdot\frac{a(1-a)(1+a)}{a+1} = \frac{1-a-a^2}{a+a+a^2}.$ □

Рјешење 2.2.25. $= \frac{(a+b)^2-4ab}{ab}\cdot\frac{(a+b)^2-ab}{ab}\cdot\frac{ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a-b)} = \frac{a-b}{ab}.$ □

Рјешење 2.2.26.

$$\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}=\frac{2a^2+2ab-3ab-3b^2}{2a^2-2ab-3ab+3b^2}=\frac{2a(a+b)-3b(a+b)}{2a(a-b)-3b(a-b)}$$

$$=\frac{(a+b)(2a-3b)}{(a-b)(2a-3b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

□

Рјешење 2.2.27.

$$=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot 3(a+b)=\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}{\frac{a+b}{ab}}\cdot\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot 3(a+b)=3.$$

□

Рјешење 2.2.28.

$$\frac{2^{2x}-4\cdot 2^x+3}{2^{x/2}-1}=\frac{2^{2x}-2^x-3\cdot 2^x+3}{2^{x/2}-1}=\frac{(2^x-1)(2^x-3)}{2^{x/2}-1}$$

$$=\frac{(2^{x/2}-1)(2^{x/2}+1)(2^x+3)}{2^{x/2}-1}=(2^{x/2}+1)(2^x-1).$$

□

Релани бројеви

Доказ 2.3.1. Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{6}$ рационалан, тј. да се може писати у облику редукованог разломка m/n. Тада је $m^2=6n^2$, па је број m дељив са шест. Зато можемо писати $m=6k$ гдје је k неки непознати цели број. Враћајући ово у претходну једнакост добијамо $36k^2=6n^2$, тј. $n^2=6k^2$, па је и n дељив са шест. То је контрадикција са претпоставком да је разломак m/n редукован. □

Доказ 2.3.2. Претпоставимо супротно, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=q\in\mathbb{Q}$. Тада $2+2\sqrt{6}+3=q^2\in\mathbb{Q}$, па $\sqrt{6}=\frac{q^2-5}{2}\in\mathbb{Q}$, што је контрадикција јер је број $\sqrt{6}$ ирационалан (задатак 2.3.1). □

Рјешење 2.3.4. Нека је $n+\sqrt{n}=q$ рационалан број. Тада је $\sqrt{n}=q-n$, што је немогуће, јер је на левој страни једнакости ирационалан, а на десној рационалан број. □

Рјешење 2.3.6. За $n=1,2,3,\dots$ решења су полиномских једначина $x^n-q=0$. □

Рјешење 2.3.7. Нека је дата дуж јединичне дужине, а њен већи део дужине x. На слици 2.3 је тада $a+b=1$, затим $b=x$ и $a=1-x$. Отуда $1:x=x:(1-x)$, односно $x^2=1-x$ и тражена једначина. Да је број $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ њено рјешење проверавамо уврштавањем. □

Рјешење 2.3.8. Нека је дата дуж дужине $x+1$, при чему је $a = x$ и $b = 1$, као на слици 2.3. Отуда $(x+1) : x = x : 1$, односно $x^2 = x+1$ и добијамо тражену једначину. Уврштавањем проверавамо да је њено рјешење број $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. □

Рјешење 2.3.9. Ако корени имају јединствене (коначне) вриједности, тада је:

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi}, \quad \phi = \sqrt{1-\phi},$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0, \quad \phi^2 + \phi - 1 = 0,$$

а то су једначине чија решења су златни бројеви. □

Рјешење 2.3.10. Добијамо $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, а отуда $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, што је једначина чије рјешење је (већи) златни број. □

Рјешење 2.3.12. Из $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \ge 0$ налазимо, табела на слици 6.16, а затим

	-∞	-1		1	+∞
x+1	-	0	+		+
x-1	-		-	0	+
x²-1	+		-		+

Slika 6.16: Неједначина $x^2 - 1 \ge 0$.

формирамо скуп решења $X = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ дате неједначине. Отуда

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in X \\ -x^2 + 1, & x \notin X. \end{cases}$$

Слично решавамо и остале. □

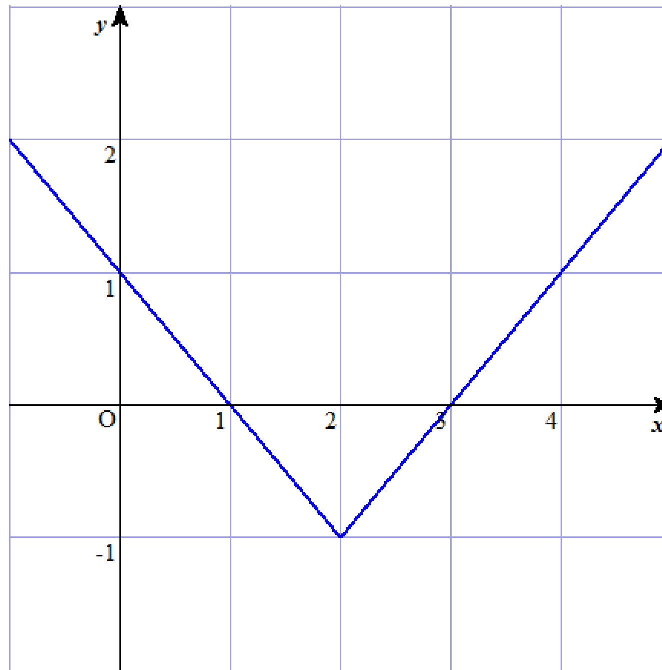
Рјешење 2.3.14. Лако налазимо:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \ge 2 \\ -x + 1, & x < 2 \end{cases}$$

а затим $f(x) = 0$ акко[22] $x = 1$ или $x = 3$. Граф је на слици 6.17. □

Рјешење 2.3.18. Ако је $0 \le a \le b$, тада је $|a+b| + |a-b| = (a+b) - (a-b) = 2b$, и $|a+b| - |a-b| = (a+b) + (a-b) = 2a$, па су обе дате једнакости тачне. Због симетрије бројева a, b видимо да су увек тачне. □

[22] ако и само ако



Slika 6.17: Граф функције $y = |x-2| - 1$.

Рјешење 2.3.20. На слици 2.5 лево, за $a > b$ је правоугли троугао са хипотенузом $\frac{a+b}{2}$ и једнуом катетом $\frac{a-b}{2}$. Према Питагориној теореми, друга катета износи

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4}} = \sqrt{ab},$$

а неједнакост постаје једнакост акко $a = b$. □

Рјешење 2.3.21. Из геометрије знамо да се пречник са периферије круга види под правим углом. На слици 2.5 десно, пречник $a+b$ се види из две тачке, формирајући два правоугла троугла. Први је једнакокраки, са висином $A = \frac{a+b}{2}$, а други није једнакокрак и зато има мању висину G, за коју због сличности у њему садржаних правоуглих троуглова имамо $a : G = G : b$, а отуда $G = \sqrt{ab}$. □

Рјешење 2.3.22. Просечна брзина = (укупни пут)/(укупно време), односно $v = s/t$.

i. Укупни пут је $s = s_1 + s_2 = 20 + 30 = 50$ километара, а укупно време путовања $t = t_1 + t_2 = 2$ часа. Поједине брзине су $v_1 = 20$ и $v_2 = 30$, па је просечна брзина $(v_1 + v_2)/2 = 25$ километара на час. То је аритметичка средина две брзине.

ii. Користимо такође претходну формулу, али у облику $t = s/v$. Прва половина пута трајала је $t_1 = s_1/v_1$, а друга $t_2 = s_2/v_2$ часова, при чему је $s_1 = s_2 = s_0$, па је укупно време путовања $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = s_0(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})$. Према томе:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = 24 \text{ km/h}.$$

То је хармонијска средина две брзине. □

Рјешење 2.3.26. Нека је $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ тачан збир тачних бројева x_i, чије су приближне вриједности редом $\bar{x}_i$, са збиром $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i$.

i. Нека су границе апсолутних грешака ових бројева истим редом Δ_i. Због $|x - \bar{x}| = |\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_i| \le \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$ добијамо $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, тј. граница апсолутне грешке збира приближних бројева једнака је збиру граница апсолутних грешака сабирака.

ii. Према томе, приближне бројеве сабирамо почев од броја са најмањим бројем цифара иза децималне тачке. Преостале бројеве заокружимо на тај број, па их саберемо. Добијени резултат заокружимо до претпоследње цифре. □

Рјешење 2.3.27. Збир датих приближних бројева је $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} \bar{x}_i = 300,513945$. Од дата четири сабирка, најмању тачност има број $\bar{x}_4 = 234,5$. Заокружићемо преостале бројеве на ту тачност плус један и сабрати их:

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^{4} \bar{x}_i = 0,57 + 65,44 + 0,01 + 234,50 = 447,72.$$

Коначни резултат заокружујемо на једну децималу $\bar{x}'' = 447,7$. Да би оценили укупну грешку означимо са $x = \sum_{i=1}^{4} x_i$ збир тачних бројева. Тада је

$$|x - \bar{x}''| = |x - \bar{x} + \bar{x} - \bar{x}' + \bar{x}' - \bar{x}''| \le |x - \bar{x}| + |\bar{x} - \bar{x}'| + |\bar{x}' - \bar{x}''|,$$

Како су све цифре датих бројева сигурне, важи:

$$|x - \bar{x}| \le \sum_{i=1}^{4} |x - \bar{x}_i| \le \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0,0505505 < 0,051.$$

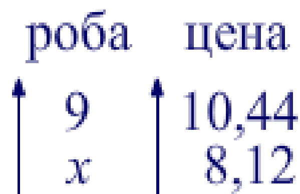
Друга разлика је $|\bar{x} - \bar{x}'| = |0,0034 + 0,005 + 0,002345 + 0,0| = 0,010745 < 0,011$. Трећа разлика је $|\bar{x}' - \bar{x}''| = 0,020$. За збир све три разлике важи:

$$|x - \bar{x}''| \le 0,051 + 0,011 + 0,020 = 0,082 < \frac{1}{2} \cdot 10^{0},$$

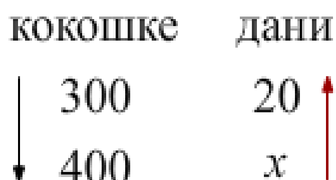
што значи да збир има сигурну једну децималу, што је у складу са претходним закључцима. □

Пропорције

Рјешење 2.4.1. Цена и количина шећера расту заједно. То је директна зависност, као на слици 6.18. Пропорцију формирамо низ стрелице $x : 9 = 8,12 : 10,44$, а затим множимо вањске па унутрашње бројеве и добијамо $10,44 \cdot x = 9 \cdot 8,12$. На крају израчунавамо $x = \frac{9 \cdot 8,12}{10,44} = 7$. За 8,12 евра могу купити 7 килограма шећера. □



Slika 6.18: Директна пропорционалност



Slika 6.19: Обрнута пропорционалност

Рјешење 2.4.3. Са више кока храна се брже троши, па имамо обрнуту пропорцију, као на слици 6.19. Једнакост $x : 20 = 300 : 400$ формирамо низ стрелице, а отуда $400x = 20 \cdot 300$, односно $x = 20 \cdot 300/400 = 15$ дана. □

Рјешење 2.4.7. Када повећавамо висину простора са сандуцима тада расте вриједност робе, односно смањује се дужина или ширина простора. Ове размере, директне и обрнуте у односу на колону „висина“ представљене су смером стрелица на слици 6.20. Одговарајуће пропорције дуж стрелица су:

$$\begin{array}{ccccc} x : 15 & = & 55 & : & 75 \\ & = & 30 & : & 25 \\ & = & 28125 & : & 37125 \end{array}$$

Отуда израз $x : 15 = (55 : 75) \cdot (30 : 25) \cdot (28125 : 37125)$, тј. $x = 15 \cdot \frac{55 \cdot 30 \cdot 28125}{75 \cdot 25 \cdot 37125} = 10$. На новом простору висина ће бити десет (10) сандука. □

Рјешење 2.4.8. Када укупну цену $C_1 = 37\,125$ долара поделимо бројем свих сандука првог простора $M_1 = 55 \cdot 30 \cdot 15 = 24\,750$, добијамо цену једног сандука $c = C_1/M_1 = 1,5$ долара. Цена једног сандука множена бројем сандука је укупна цена, $C_1 = c \cdot M_1$. Иста формула важи и за друго складиште, $C_2 = c \cdot M_2$, одакле $28\,125 = 1,5 \cdot (75 \cdot 25 \cdot x)$, а отуда $x = 28\,125/(1,5 \cdot 75 \cdot 25) = 10$. Висина другог простора је десет (10) сандука, што се слаже са претходним резултатом. □

Рјешење 2.4.9. Припашће им износи редом x, y, z. Тако је $x : y : z = 5 : 3 : 2$ и $x + y + z = 10\,000$. Из прве добијамо једнакости $x = 5k$, $y = 3k$ и $z = 2k$, са непознатим коефицијентом k, што уврштавањем у другу даје $5k+3k+2k = 10\,000$, а отуда $k = 100$. Према томе, Лазар, Марко и Невена ће добити редом по $x = 500$, $y = 300$ и $z = 200$ динара. □

дужина		ширина		висина		цена	
55	↓	30	↓	15	↑	37125	↑
75		25		x		28125	

Slika 6.20: Простор са сандуцима

Рјешење 2.4.10. Делови дужине су x_1, x_2, x_3 и x_4. Тако је $x_2 = 1,2x_1$, $x_3 = 1,2^2x_1$, $x_4 = 1,2^3x_1$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$. Уврштавањем привих једнакости у другу добијамо $x_1 + 1,2x_1 + 1,2^2x_1 + 1,2^3x_1 = 100$, односно $(1 + 1,2 + 1,2^2 + 1,3^3)x_1 = 100$, а отуда приближно до милиметра:

$$x_1 = 18,63 \quad x_2 = 22,35 \quad x_3 = 26,83 \quad x_4 = 32,19$$

метара. □

Рјешење 2.4.13. Фомирамо шему сличну слици 2.8 из које налазимо $x : y = 10 : 30$. Друга једначина је $x + y = 220$. Резултати су $x = 55$ и $y = 165$ килограма. □

Рјешење 2.4.15. Узећемо редом по x_1, x_2, x_3 и x_4 килограма датих врста брашна. Тако израчунавамо:

$$72x_1 + 48x_2 + 60x_3 + 66x_4 = 50(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

$$(72 - 50)x_1 + (48 - 50)x_2 + (60 - 50)x_3 + (66 - 50)x_4 = 0,$$

$$22x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 = 0.$$

Овдје можемо направити велики број размера, тако што неке непознате узмемо произвољно а остале израчунамо. Једно такво рјешење је $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_2 = 24$. □

Рјешење 2.4.17. Погледајмо две комбинације мешања на слици 6.21. Настављамо слично као у претходном примјеру, али уочавамо два различита односа. У једном случају имамо $a : b : c : d = 2 : 1 : 4 : 6$, а у другом $a : b : c : d = 1 : 2 : 6 : 4$. □

a	80%		10	2	a	80%		5	1
b	70%		5	1	b	70%		10	2
		50%					50%		
c	45%		20	4	c	45%		30	6
d	40%		30	6	d	40%		20	4

Slika 6.21: Мешање четири компоненте

Рјешење 2.4.18. Према шеми слике 6.22 имамо $100 : 500 = (850 - x) : (x - 600)$, одакле тражени резултат $808,33$ промила. □

100 g	600‰	$850 - x$
	x	
500 g	850‰	$x - 600$

Slika 6.22: Финоћа смеше сребра

Рјешење 2.4.19. i. Првих 30 часова радила су оба радника и урадили 3/4 посла. Зато они требају поделити исти део укупног износа (18 000 рубаља) пропорционално месечним платама (30 : 17). Лако налазимо да ће у тој првој исплати први радник добити 11489, 36 рубаља а други 6510, 64 рубље. Следећих 10 часова ради само други радник и добија остатак новца, тј. још 6 000 рубаља. Дакле, првом и другом раднику на крају посла треба исплатити укупно по 11 489 и 12 511 рубаља.

ii. Дефинишемо коефицијент $k = pt/\sigma$ исплате радника сразмеран његовој плати p и времену t проведеном на послу, а σ је произвољна константа коју можемо искористити за нормирање. За првог и другог радника узимамо бројеве редом $30 \cdot 3 = 90$ и $17 \cdot 4 = 68$, чији је збир $\sigma = 158$. Коефицијенте нормирамо па добијамо $k_1 = 90/\sigma = 0,57$ и $k_2 = 68/\sigma = 0,43$. вриједност појединe исплате је $k_i \cdot 24\ 000$, тј. коефицијент пута укупни износ. То су 13 680 и 10 320 рубаља, за првог и другог радника. □

Рјешење 2.4.20. i. У првих 5 часова раде сва три радника и деле $\frac{5}{12} \cdot 1200 = 500$ KM на износе x_1, y_1, z_1 KM редом. Из $x_1 : y_1 : z_1 = 7 : 6 : 8$ и $x_1 + y_1 + z_1 = 500$ добијамо $\lambda_1 = 500/21$ и $x_1 = 7\lambda_1, y_1 = 6\lambda_1, z_1 = 8\lambda_1$, односно (у KM):

$$x_1 = 166,67 \quad y_1 = 142,86 \quad z_1 = 190,47.$$

Наредна 4 часа раде само други и трећи радник и деле $\frac{4}{12} \cdot 1200 = 400$ KM на износе y_2, z_2 редом. Из $y_2 : z_2 = 6 : 8$ и $y_2 + z_2 = 400$ налазимо $\lambda_2 = 400/14$ заједно са $y_2 = 6\lambda_2, z_2 = 8\lambda_2$, а отуда:

$$x_2 = 0 \quad y_2 = 171,43 \quad z_2 = 228,57.$$

Последња 3 часа ради само трећи радник и заради преосталих $z_3 = \frac{3}{12} \cdot 1200$ KM, па можемо писати:

$$x_3 = 0 \quad y_3 = 0 \quad z_3 = 300.$$

Према томе, збирови ($w = w_1 + w_2 + w_3$):

$$x = 167, \quad y = 314, \quad z = 719,$$

су укупне зараде редом првог, другог и трећег радника (у KM).

ii. Платни коефицијенти су сразмерни плати и времену, односно бројевим 35, 48 и 96, чији је збир 185. Након нормирања добијамо $k_1 = \frac{35}{185} = 0,19$ затим $k_2 = 0,29$ и $k_3 = 52$. Исплате у KM, редом:

$$x = 228, \quad y = 348, \quad z = 624,$$

добијамо множењем укупног износа 1200 KM са коефицијентом радника. □

Рјешење 2.4.21. Из једначине $110 \cdot 1,2 \cdot x = 100$ налазимо $x \approx 0,76$, што значи да је роба на крају појефтинила за приближно 24 %. □

Рјешење 2.4.22. Претходне плате Ане и Бранке означимо редом са $2x$ и $3x$. Након повећања, тај однос је $(2x + 1000) : (3x + 1000) = 9 : 11$. Отуда

$$9(3x + 1000) = 11(2x + 1000),$$

$$27x + 9000 = 22x + 11000,$$

$$5x = 400.$$

Плате Ане и Бранке су биле $2x = 800$ и $3x = 1200$ KM, а сада су 1800 и 2200 KM. □

Рјешење 2.4.23. У првој шољи наћи ће се тачно онолико млека колико у другој кафе. Наиме, колико кафе фали у првој посуди, тачно толико има млека, а колико млека фали у другој, тачно толико има кафе! □

Рјешење 2.4.24. Када из прве посуде преспемо x литара сирупа у 4 литре воде, у првој посуди ће остати $1 - x$ литара сирупа, а у другој ће бити $4 + x$ литара сока. Однос сирупа и воде у соку је $\frac{x}{4+x}$. Када вратимо исту количину течности, у првој посуди ће се наћи $s = 1 - x + x \cdot \frac{x}{x+4} = \frac{4-3x}{4+x}$ литара сирупа. Да би то била петина раствора (20%) биће $\frac{4-3x}{4+x} = \frac{1}{5}$, а отуда $x = 1$. Потребно је истрести сав сируп у воду, промешати и вратити литру сока назад. У обе посуде биће 20% раствор сирупа у води. □

Тачке и праве

Рјешење 3.1.1. а) Сваке две од $n = 12$ датих тачака могу дефинисати једну праву. Број начина[23] издвајања по $k = 2$ тачаке је $\binom{n}{k} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{1\cdot 2} = 66$.

б) По три тачке одређују једну раван, највише $\binom{12}{3} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$ равни. □

Рјешење 3.1.2. а) Из $V_2^n = 21$ следи $n = 6$ тачака. б) Из $C_3^n = 20$ следи $n = 5$. □

Рјешење 3.1.3. Из $n \cdot (n-1)/2 = 2n$ следи $n = 5$ тачака. □

Рјешење 3.1.4. Из $C_3^n = 2V_2^n$ следи $n = 8$ тачака. □

Рјешење 3.1.8. Ако за две праве a, b важи $a \cap b = \{T\}$, али постоји права c која се са њима не сече у тој тачки, већ у тачкама $c \cap a = \{A\}$ и $c \cap b = \{B\}$, тада c лежи у равни одређеном правама a и b. Свака следећа права мора лежати у истој равни, јер сече три праве a, b, c у бар две разне тачке. Наиме, према Хилбертовим аксиомама инциденције, права која са равни има две заједничке тачке, лежи у тој равни. □

[23] број комбинација без понављања

Рјешење 3.1.9. Претпоставимо супротно. Тада, ако је $B-A-D$, онда су тачке B, D са разних страна тачке A, па из $A-B-C$ следи $A-C-D$, што је супротно претпоставци. Дакле, није $A-B-D$. □

Рјешење 3.1.10. Из $A-O-B$ и $A-O-C$ следи да су тачке B и C са исте стране тачке O, па није $B-O-C$. □

Рјешење 3.1.11. Мора бити $a \cap b = \varnothing$, јер ако права a сече праву b, онда би скуп S имао тачке са разних страна праве b. □

Рјешење 3.1.12. в. претходни задатак. □

Рјешење 3.1.13. Сваке две праве које се секу одређују 4 конвексна угла која нису испружена. Са $n = 3$ правих имамо $4 \cdot C_2^n = 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 12$ таквих углова. □

Рјешење 3.1.15. в) $n(n-3)/2$, јер из сваког темена n-тоугла можемо повући $n-3$ дијагонале, пута број n темена и подељено са 2, јер је тако свака дијагонала вучена два пута. □

Рјешење 3.1.16. $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ четвороуглова. □

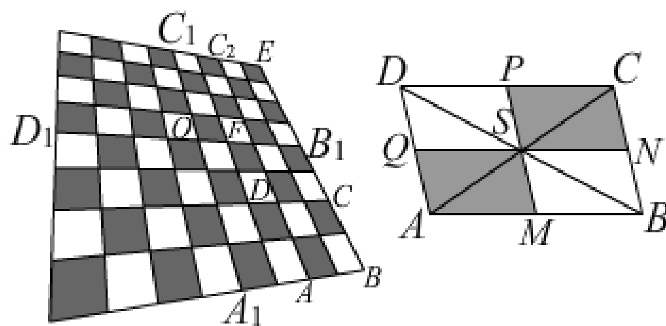
Рјешење 3.1.17. Из $\binom{n}{3} = \binom{n}{4}$ следи $n = 7$ тачака. □

Рјешење 3.1.18. Поделимо дати правоугаоник на $4 \times 3 = 12$ квадрата јединичних страница. Подела се састоји од 6 парова спојених таквих квадрата у правоугаонике страница 2×1, дијагонала $\sqrt{5}$, у које не може стати 6 или више тачака тако да су сваке две удаљене за више од $\sqrt{5}$. □

Рјешење 3.1.19. Поделимо дати круг на 1007 једнаких исечака са углом $360°/1007$. У бар једном од тих исечака се морају наћи три тачке (тачку на граници узимамо да припада једном од два суседна). Површина $I_1 = 1/2007 \approx 0,000993049$ исечка је већа од површине P_Δ произвољног троугла унутар исечка, па је $P_\Delta < I_1 < 0,001$. □

Рјешење 3.1.20. Спојимо средине A_1, B_1, C_1, D_1 наспрамних страница дате плоче, тј. четвороугаоника, као на слици 6.23 лево. Четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм, па му се дијагонале полове, тј. O је средина дужи A_1C_1 и D_1B_1 према ознакама на слици 6.23. Ако спојимо средине наспрамних дужи $C_2 \in C_1E$ і $A \in A_1B$ опет је четвороугао AB_1C_2O паралелограм, тј. тачка F је средина дужи AC_2 и OB_1. Ако поступак поновимо за четвороуглове A_1BB_1O и ABB_1F добићемо да су тачке M, N, P, Q средине дужи AB, BC, CD и DA редом, као што се види на слици 6.23 десно.

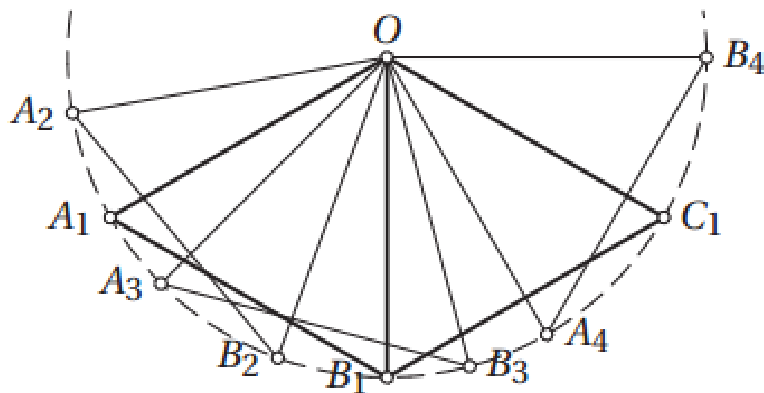
Посматрајмо један од четвороуглова димензија 2×2 поља на које се плоча може поделити. Рецимо, четвороугао $ABCD$ на датој слици. Докажимо да је у том четвороуглу збир површина црних једнак збиру површина белих поља. Троуглови SBN и SCN имају исте површине, јер имају основице исте дужине $BN = CN$ и једнаке висине до темена S. Слично, троуглови SCP и SDP имају једнаке површине, па и троуглови SDQ и SAQ, и троуглови SAM и SBM. Одатле, збир



Slika 6.23: Подела четвороугаоника

црних површина у четвороуглу $ABCD$ једнак је збиру белих површина. Пошто се цела плоча 8×8 може разложити на 16 оваквих површина, онда је збир свих црних површина на плочи једнак збиру свих белих. □

Рјешење 3.1.21. Одаберимо различите тачке $A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m,C_1$ на кругу k са центром O тако да су троуглови OA_iB_i $(i = 1,2,\dots,m)$ и OB_1C_1 једнакостранични, као на слици 6.24. Скупови $\{O,A_1,\dots,A_m,B_1,\dots,B_m\}$ и исто са C_1 су уравнотежени и имају редом $2m + 1$ и $2m + 2$ елемената, $m \in \mathbb{N}$. □

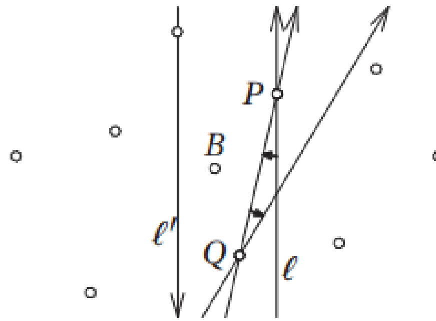


Slika 6.24: Уравнотежен скуп тачака.

Рјешење 3.1.22. Орјентишимо праву ℓ произвољно у почетној позицији. Та права у сваком тренутку дијели раван на леву и десну полураван. При преласку центра из тачке P у тачку Q током рада ветрењаче, тачка $P \in \ell$ прелази у леву полураван, док Q прелази из леве полуравну на праву, као што се види на слици 6.25. Према томе, број тачака n_1 и n_2 на левој и десној полуравни око праве ℓ остаје стално исти, осим када $P, Q \in \ell$.

Одаберимо произвољну тачку $A \in \mathcal{S}$ и праву ℓ кроз A тако да је $|n_1 - n_2| \leq 1$ и пустимо ветрењачу у погон. Претпоставимо да постоји тачка B која је на ℓ само

коначно много пута. Почев од неког тренутка, B никада неће лећи на ℓ, тј. увек ће остати са исте, рецимо леве стране праве ℓ. Када се ℓ обрне за $180°$, долази у положај неке праве $\ell' \| \ell$ али супротне орјентације. Тачка B је између ℓ' и ℓ, што значи да се лево од ℓ' налазе све тачке које су десно од ℓ плус тачка B и једна тачка која у том моменту лежи на ℓ, што значи $n_1 - n_2 \geq 2$, противно претпоставци. Према томе, оваква ветрењача пролази кроз сваку тачку бесконачно много пута. □



Slika 6.25: Ветрењача, ММО 2011. године.

Углови

Рјешење 3.2.1. $\alpha = 15°$, $\beta = 25°$ и $\gamma = 20°$. □

Рјешење 3.2.2. i. Слика 3.3 лево. Збир збир унутрашњих углова троугла је $180°$. Из $44° + 95° + a° = 180°$ следи $a° = 41°$. Вањски угао троугла једнак је збиру два унутрашња њему не суседна угла, па $66° = a° + b°$. Отуда $b° = 25°$.

ii. Слика 3.3 средина. Углови са паралелним крацима су једнаки, па је $a° = 37°$ и $b° = 75° - a° = 38°$. Исто $x° = b° = 38°$.

iii. Из центра описане кружнице правилног петоугла, свака страница се види под углом $2e° = 360°/5 = 72°$. Тада су $c°, e°, d°$ периферни углови над једнаким тетивама, па су и међусобно једнаки, тј. $c° = d° = e° = 36°$. Затим, сваки унутрашњи угао једнак је горњем, тј. $a° = b° = c° + e° + d° = 108°$. Из збира углова троугла $x° + c° + a° = 180°$ следи $x° = 36°$, а због симетрије $y° = 36°$. □

Рјешење 3.2.3. Из $x = 2(180° - x)$ следи $x = 120°$. □

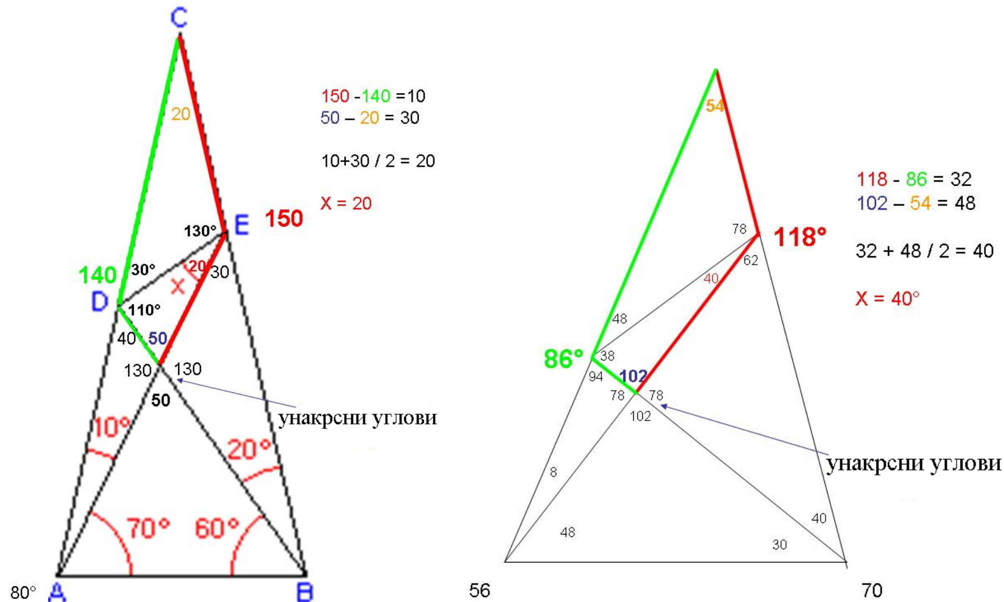
Рјешење 3.2.4. Из $5(90° - x) = 2(180° - x) - 24°$ следи $x = 38°$. □

Рјешење 3.2.5. Из $\alpha = \frac{2}{3}\beta$ и $\beta = \frac{3}{7}\gamma$, због $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, добијамо $\gamma = 105°$, $\beta = 45°$ и $\alpha = 30°$. □

Рјешење 3.2.6. i. Из $\alpha + 6(90° - \alpha) = 180°$ следи $\alpha = 72°$.

ii. Из $\alpha + 6(180° - \alpha) = 90°$ следи $\alpha = 165°$. □

Рјешење 3.2.7. На слици 6.26, лево и десно, приказани су кораци израчунавања углова x. Лево је $x = 20°$, а десно $x = 40°$. □



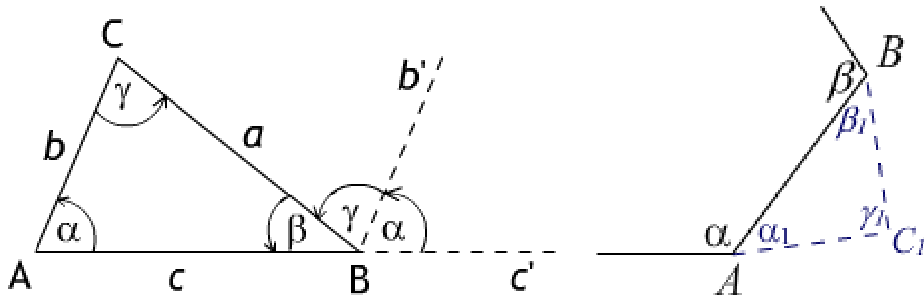
Slika 6.26: Корак по корак до непознатих углова.

Рјешење 3.2.8. Ради избегавања понављања доказа у скрипти [1], овдје доказујемо индукцијом.

На слици 6.27 лево, дат је троугао ABC, са полуправом $Bb' \| Ab$ и продужетком странице c преко у полуправу Bc'. Углови са паралелним крацима су једнаки, па је $\angle c'Bb' = \angle cAb = \alpha$, $\angle b'Ba = \angle bCa = \gamma$, а њихов збир је вањски угао троугла у темену B, који се надовезује на β до испруженог угла. Према томе, за $n = 3$ је тачно тврђење да је збир унутрашњих углова конвексног n-тоугла једнак $(n-2) \cdot 180°$.

Претпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \ge 3$. На произвољној страници AB датог многоугла додајмо још један троугао (ABC_1), као на слици 6.27 десно, тако да добијемо $n+1$-тоугао. Збир унутрашњих углова новог многоугла је збир унурашњих углова старог, $(n-2)180°$ плус збир унутрашњих углова додатог троугла, $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180°$, што је укупно $(n-1)180°$. Према томе, тврђење је тачно и за $n+1$, чиме је доказ индукцијом завршен. □

Рјешење 3.2.10. Лукови се виде под централним угловима $BC = 7k$, $CD = 8k$, $AD = 12k$ и $AB = 9k$ са непознатим параметром k који одређујемо из једначине $7k+8k+12k+9k = 360°$. Отуда $k = 10°$, па налазимо $BC = 70°$, $CD = 80°$, $AD = 120°$ и $AB = 90°$. Знамо да је периферни угао једнак половини централног над истом тетивом. Остало читамо са дате слике 3.7.



Slika 6.27: Збир унутрашњих углова.

Периферни из тачке B над тетивом CD је $\angle 1 = 40°$. Над тетивом AD је $\angle 2 = 60°$. Из тачке A над тетивом BC је $\angle 3 = 35°$. Збир углова у троуглу, $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, даће $\angle 4 = 85°$. Њему суплементан је $\angle 5 = 95°$. Затим имамо унакрсне углове $\angle 6 = \angle 4 = 85°$ и $\angle 7 = \angle 5 = 95°$. Вањски угао троугла једнак је збиру два унутрашња њему несуседна угла, па је $\angle 8 = \angle 1 + \angle 5 = 135°$. Угао између тангенте (ED) и тетиве (BD) једнак је периферном углу над том тетивом, па је $\angle 9 = \frac{BC+CD}{2} = 75°$. Збир углова у четвороуглу је 360°, па је $\angle 10 = 65°$. Његов суплемент је $\angle 11 = 115°$. Збир три угла троугла је $\angle 6 + \angle 9 + \angle 12 = 180°$, па је $\angle 12 = 20°$. □

Рјешење 3.2.11. Једнаке тетиве се виде под једнаким централним угловима па према томе и са једнаким периферним угловима, в. примјер 3.2.9. Од две неједнаке тетиве краћа је даља од центра круга па ће бити наспрам мањег угла. □

Рјешење 3.2.12. Нека је ABC троугао са $\alpha < \beta$ и са симетралама углова AM и BN, као на слици 6.28. Изаберимо $M' \in AM$ тако да је $\angle M'BN = \frac{1}{2}\alpha$. Како је тај угао једнак $\angle M'AN$, четири тачке N, A, B, M' леже на кружници. Затим имамо:

$$\alpha < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\angle BAN < \angle M'BA < 90°.$$

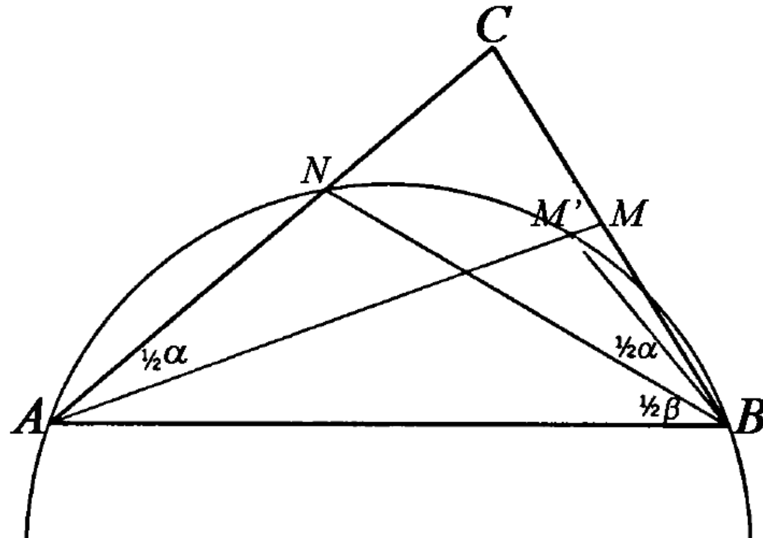
Према задатку 3.2.11, због $BN < M'A$ је $AM > AM' > BN$. □

Доказ 3.2.13. Овај исказ можемо рећи и на следећи начин: у троуглу ABC ако је $\alpha \neq \beta$, тада је $AM \neq BN$, за одговарајуће симетрале. То је непосредна последица претходног тврђења, из задатка 3.2.12. □

Доказ 3.2.14. На слици[24] 6.29 је четвороугао $ABCD$ са окомитим дијагоналама $AC \perp BD$ и линијом $ME \perp BC$ која пресеца AD у тачки F. Очигледно је:

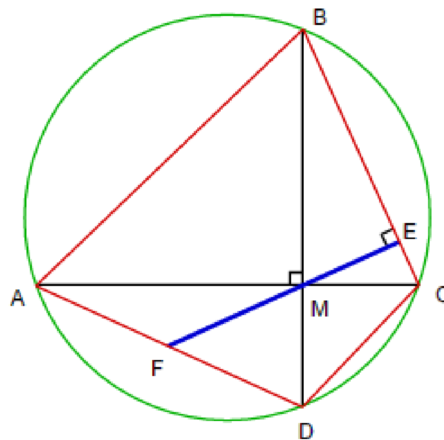
$$\angle DMF = \angle BME = \angle MCE = \angle ACB = \angle ADB = \angle FDM.$$

[24] Brahmagupta: https://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta



Slika 6.28: Троугао ABC са симетралама углова AM и BN.

Зато је троугао FMD једнакокрак. Аналогно, такав је и троугао FAM. Према томе $FA = FM = FD$. □

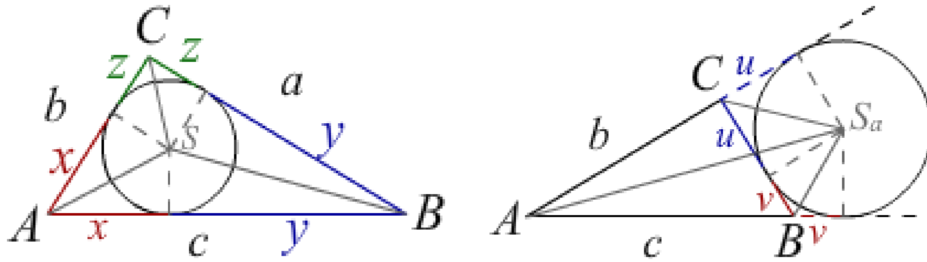


Slika 6.29: Брахмагупта је нашао $AF = FD$.

Рјешење 3.2.20. i. Са слике 6.30 лево, налазимо једнакости $x + y = c$, $y + z = a$ и $z + x = b$, а отуда $x = s - a$, $y = s - b$ и $z = s - c$, гдје је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла.

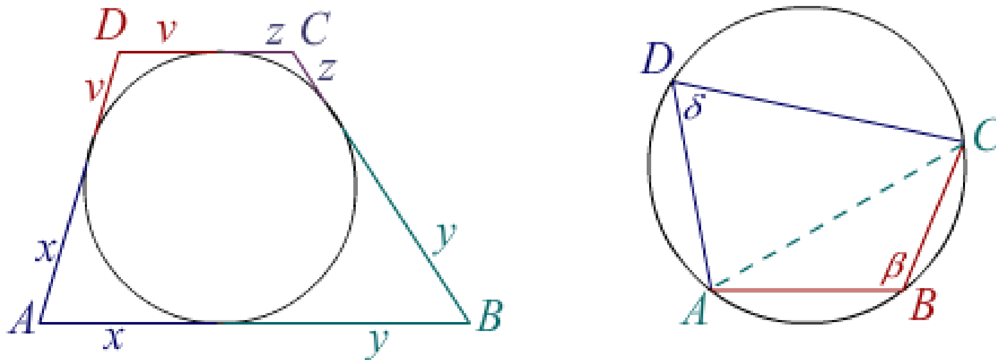
ii. Са слике 6.30 лево, налазимо $2s = (b + u) + (c + v)$, па због $b + u = c + v$, имамо $u = s - b$ и $v = s - c$. □

Рјешење 3.2.21. Читамо са слике 6.31 лево, затим десно.



Slika 6.30: Уписана и приписана кружница троугла.

i. $AB + CD = BC + DA \iff (x + y) + (z + v) = (y + z) + (v + x)$, што је тачно.
ii. Периферни углови из B и D су са разних страна тетиве AC, па су суплементни.
□



Slika 6.31: Уписана и описана кружница четвороугла $ABCD$.

Рјешење 3.2.22. i. Периферни углови, из тачака A_1 и B_1, над пречником AB су прави.

ii. На истој кружници, периферни углови из тачака A и A_1 леже са различитих страна тетиве BB_1 па су суплементни. То значи $\angle CA_1B_1 = \angle BAC$. □

Рјешење 3.2.23. Из претходног задатка 3.2.22 знамо да тачке A, B, A_1, B_1 леже на кружници чији је центар тачка C_s. Троугао BB_1C је правоугли. Затим, дужине C_sA_1 и C_sB_1 су једнаке (полупречнику), а $\angle A_1C_sB_1$ је централни угао те кружнице и двоструко је већи од периферног угла $\angle A_1BB_1 = 30°$. Отуда $\angle C_sA_1B_1 = 2\angle A_1BB_1 = 60°$, што значи да је троугао ABC једнакостраничан. □

Доказ 3.2.24. Када је AB пречник дате кружнице k, тада је троугао ABC правоугли и $C = A_1 = B_1$, па је увек $A_1B_1 = 0$.

Када AB није пречник кружнице k, означимо са l_1 и l_2 њен већи и мањи лук AB. Нека је $\gamma = \angle ACB$ и нека $C \in l_1$. Тада је $\angle A_1BB_1 = 90° - \gamma$. Тачке A, B, A_1, B_1

припадају новој кружници k_1 (в. задатак i. 3.2.22) са центром C'. Периферијски угао $\angle A_1C'B_1 = 180^\circ - 2\gamma = \text{const.}$ па је и дужина $A_1B_1 = \text{const.}$

Када $C \in l_2$, тада $\angle ACB = 180^\circ - \gamma$. То повлачи $\angle A_1BB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\angle A_1C'B_1 = 180^\circ - 2\gamma = \text{const.}$ а даље исто као у претходном случају, са $C \in l_1$. □

Доказ 3.2.25. Претпоставимо да су M, N такве тачке на страницама BC, AB редом, да је четвороугао $ABMN$ тетивни. Нека је k кружница са центром O описана око троугла ABC и нека је t њена тангента у тачки C. Тада је $\angle tCB = \angle CAB = \alpha$ и са друге стране $\alpha + \angle BMN = 180^\circ$. Отуда $\angle NMC = \alpha = \angle tCB$, па је $MN \| t$. Због $OC \perp t$ је $OC \perp MN$.

Обратно, претпоставимо да $M \in BC$, $N \in AC$ и $OC \perp MN$. Из $OC \perp t$ следи $MN \| t$ и $\angle NMC = \angle tCB = \alpha$, па је $\angle NMC = \alpha$. Супротни углови четвороугла $ABMN$ су суплементни, па је он тетивни. □

Сличност

Доказ 3.3.1. На слици 3.13, спојимо $B'C$ и BC'. Површине (P_3) троуглова $BB'C$ и $BC'C$ су једнаке, па је редом:

$$P_3(BB'C) : P_3(ABC) = P_3(BC'C) : P_3(ABC),$$

$$P_3(BB'C) : P_3(ABC) = BB' : AB, \quad P_3(BC'C) : P_3(ABC) = C'C : CA,$$

$$BB' : AB = CC' : CA.$$

□

Доказ 3.3.2. Из:

$$BB' : AB = P_3(BB'C) : P_3(ABC), \quad C'C : CA = P_3(BC'C) : P_3(ABC)$$

следи:

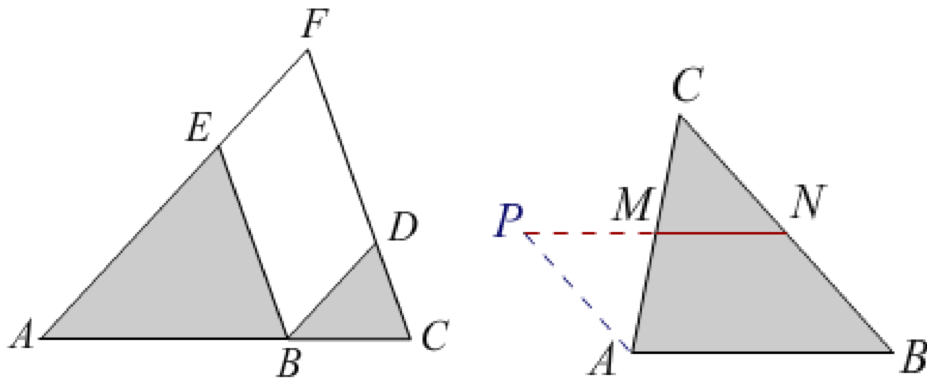
$$P_3(BB'C) : P_3(ABC) = P_3(BC'C) : P_3(ABC),$$

$$P_3(BB'C) = P_3(BC'C),$$

што значи да троуглови $\Delta BB'C$ и $\Delta BC'C$, поред заједничке основице BC имају и једнаке висине, што значи да је $BC \| B'C'$, тј. $a \| a'$. □

Доказ 3.3.3. На слици 6.32 лево, троуглови ΔABE и ΔBCD имају једнаке углове: $\angle BAE = \angle CBD$, $\angle EBA = \angle DCB$ и $\angle AEB = \angle BDC$. Збир два угла троугла мањи је од два права угла, тј. $\angle BAE + \angle EBA < 180^\circ$, па је $\angle BAE + \angle DCB < 180^\circ$, што значи да ће се продужеци страница AE и CD срести у тачки F. Четвороугао $FEBD$ је паралелограм.

Наспрамне странице паралелограма су једнаке, $EF = BD$ и $BE = DF$. Из $BE \| CF$ следи $AE : EF = AB : BC$, а због $EF = BD$ следи $AE : BD = AB : BC$. Из $BD \| AF$ следи $AB : BC = FD : DC = EB : DC$. Према томе, $AB : BE = BC : CD$, затим $AE : EB = BD : DC$. □



Slika 6.32: а) Слични троуглови. б) Средња линија троугла.

Доказ 3.3.4. На слици 6.32 десно, средине страница троугла ABC су тачке $M \in AC$ и $N \in BC$. Удвостручимо средњу линију MN тако да имамо распоред $P - M - N$. Четвороугао $CPAN$ је паралелограм, јер му се дијагонале полове у тачки M. Отуда $AP \| NC$ и $AP = NC$, па је $AP \| BN$ и $AP = BN$. Зато је и четвороугао $ABNP$ паралелограм. Према томе, $NP \| BA$ и $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$, што је и требало доказати. □

Доказ 3.3.8. Означимо редом са M, N, P средине страница насупрот темена A, B, C датог троугла, као на слици 6.33. Због $AB = 2 \cdot AP$, $AC = 2 \cdot AN$ и заједничког угла $\angle A$ имамо сличне троуглове $\Delta ABC \sim \Delta APN$. Зато је $PN \| BC$ и $BC = 2 \cdot PN$, што је на други начин доказано у задатку 3.3.4.

Тежишнице BN и CP секу се у тачки T коју називамо тежиште. Због $PN \| BC$ је $\angle TPN = \angle TCB$ и $\angle PNT = \angle TBC$, па су слични и троуглови $\Delta TBC \sim \Delta TNP$. Затим, из $BC = 2 \cdot PN$ следи пропорција $2 : 1$ ових троуглова, посебно

$$BT : TN = 2 : 1, \quad CT : TP = 2 : 1,$$

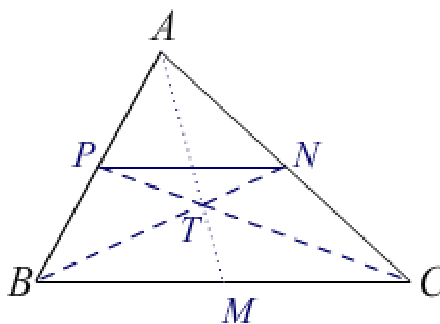
Аналогно, конструишући прво средњу линију MN доказује се $AT : TM = 2 : 1$, чиме је тражено тврђење у потпуности доказано. □

Доказ 3.3.10. i. Свака тачка симетрале угла је једнако удаљене од кракова угла. Тачка пресека симетрале два угла троугла је једнако удаљена од све три странице троугла, па је она јединствена и центар уписаног круга датог троугла.

Аналогно, свака тачка симетрале дужи једнако је удаљена од крајева дужи. Тачка пресека симетрала две странице троугла је једнако удаљена од сва три темена троугла, па је она јединствена и центар је описаног круга датог троугла.

ii. Дати троуглао узмемо за медијални новог, већег троугла. Према тврђењу задатка 3.3.9-v. јединствени центар описаног круга већег троугла је ортоцентар медијалног троугла. □

Доказ 3.3.11. i. Следи непосредно из Чевијеве теореме 3.2.15.



Slika 6.33: Средине страница и тежиште T троугла ABC.

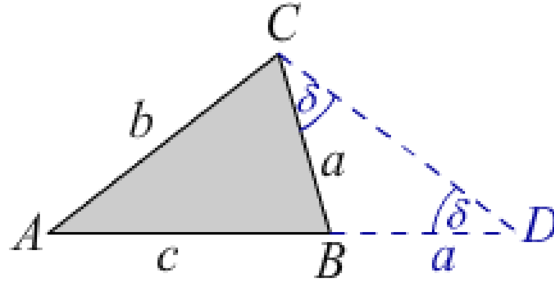
ii. Приметимо да имамо једнаке површине троуглова $P_3(TBA') = P_3(TA'C) = x$, $P_3(TCB') = P_3(TB'A) = y$ и $P_3(TAC') = P_3(TC'B) = z$. Међутим, из $P_3(CAC') = P_3(CC'B)$ следи $2y + z = z + 2x$, па је $x = y$, а аналогно из $P_3(ABA') = P_3(AA'C)$ добијамо $y = z$. Дакле, $x = y = z$.

iii. Настављајући претходно налазимо и $P_3(TAB) = 2P_3(TBA')$. Како ови троуглови имају исте висине, добијамо $AT = 2 \cdot TA'$, тј. тежиште дијели тежишницу у односу $2:1$ почев од врха. □

Рјешење 3.3.12. Са слике 3.16 смо видели да је H ортоцентар троугла ABC, док је ортоцентар H' медијалног троугла $A'B'C'$ уједно и центар O описаног круга ΔABC. Медијални је дупло мањи од главног троугла, висине су им паралелне, па налазимо $AH = 2 \cdot OA'$. Из претходног задатка 3.3.11 узимамо да је $AT = 2 \cdot TA'$, па пошто су обе висине AA_1 и OA' окомите на страницу BC, оне су паралелне и $\angle HAT = \angle OA'T$, $\Delta HAT \sim \Delta OA'T$ и $\angle ATH = \angle A'TO$. То значи да су тачке O, T, H колинеарне и да је $HT = 2 \cdot TO$. □

Доказ 3.3.13. Вратимо се опет на слику 3.16. Из тачке A'', средине странице $B'C'$, повуцимо нормалу на ту страницу до тачке O' пресека са Ојлеровом линијом . Све три линије $AH, A''O', A'O$ окомите су на $B'C'$ и међусобно паралелне. Како је $AA'' = A''A'$ то је $A''O'$ на пола пута од AH до $A'O$. Зато је O' средина дужи HO. Аналогно радимо са нормалама у средњим тачкама $B'' \in C'A'$ и $C'' \in A'B'$, налазећи исту тачку O' пресека са (истом) Ојлеровом линијом. Ове нормале су симетрале страница троугла $A'B'C'$ па је њихов пресек O' центар описаног круга тог троугла. □

Доказ 3.3.14. Продужимо страницу $AB = c$ троугла ABC до тачке D, тако да је $A - B - D$ и $BD = BC = a$, као на слици 6.34. Троугао BDC је једнакокраки, са једнаким угловима $\delta = \angle BDC = \angle DCB < \angle DCA$. Према томе, у троуглу ADC наспрам мањег угла лежи краћа страна, $AC < AD = AB + BD = AB + BC$, а отуда $AC < AB + BC$, тј. $b < c + a$, што је и требало доказати. □



Slika 6.34: $b < a + c$.

Рјешење 3.3.16. Из Птоломејеве теореме примењене на тетивни четвороугао $AMBC$ имамо $AB \cdot MC = BC \cdot MA + AC \cdot MB$. Како је $AB = BC = AC = a$, добијамо $a \cdot MC = a \cdot MA + a \cdot MB$, па краћењем са a тражену једнакост. □

Доказ 3.3.17. Уочимо сличне троуглове $\Delta PAB' \sim \Delta PBA'$, небитно да ли је P унутар или изван датог круга, нити да ли је $B = B' = T$. Отуда $PA : PB' = PB : PA'$, односно $PA : PT = PT : PT'$. Прва пропорција је тражена једнакост i. а друга је њен посебан случај ii. $PT^2 = PA \cdot PA'$.

iii. Узимајући BB' пречник кроз P, из i. за P унутар круга следи $AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = (r + d)(r - d) = r^2 - d^2$, а за P изван круга аналогно $AP \cdot PA' = d^2 - r^2$. □

Рјешење 3.3.19. Када се кругови додирују извана, тада је удаљеност између центара кругова $C_1C_2 = r + r'$. Оставимо ли центре C и C' на апсциси, а тачку додира кругова поставимо у исходиште, једначина радијалне осе (3.11) постаје:

$$x = \frac{c' - c}{2(p' - p)} = \frac{(p'^2 - r'^2) - (p^2 - r^2)}{2(r' + r)} = 0,$$

јер су тада координате центара кругова $C(-r, 0)$ и $C'(r', 0)$, тј. $p = -r$ и $p' = r'$. Према томе, када центри кругова леже на апсциси а кругови се додирују извана у исходишту система Oxy, радикална оса ℓ_1 на слици 3.19 лево, је ордината.

Када су кругови још мало ближе, секу се у две тачке од којих је једна L, праве ℓ_2 коју узимамо за ординату. За висину троугла $C(p, 0)C'(p', 0)L(0, h)$ важи:

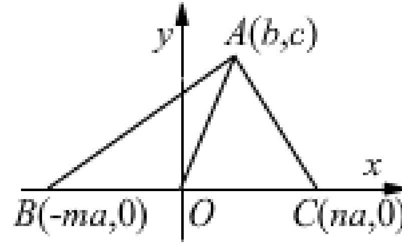
$$LO^2 = CL^2 - CO^2 = C'L^2 - C'O^2,$$

$$h^2 = r^2 - p^2 = r'^2 - p'^2,$$

па једначина радијалне осе (3.11) постаје:

$$x = \frac{c' - c}{2(p' - p)} = 0.$$

Дакле, радикална оса је ℓ_2 на слици 3.19 десно. □



Slika 6.35: Стјуартова теорема

Доказ 3.3.22. Са слике 6.35 израчунавамо:

$$n \cdot AB^2 + m \cdot AC^2 = n[(b+ma)^2 + c^2] + m[(b-na)^2 + c^2]$$
$$= (m+n)(b^2+c^2) + nm^2a^2 + mn^2a^2$$
$$= n \cdot BO^2 + m \cdot CO^2 + (m+n) \cdot AO^2.$$

□

Доказ 3.3.23. Нацртајте слику! Ако је тачка D средина странице BC биће AD тежишница и важиће пропорција $AT : TD = 2 : 1$. Према Стујартовој теореми, задатак 3.3.22, за три троугла PDA, PCB и TBC налазимо:

$$PA^2 + 2 \cdot PD^2 = TA^2 + 2 \cdot TD^2 + 3 \cdot PT^3,$$
$$PB^2 + PC^2 = BD^2 + DC^2 + 2 \cdot PD^2,$$
$$TB^2 + TC^2 = BD^2 + DC^2 + 2 \cdot TD^2.$$

Сабирањем прве две једнакости и применом треће, након сређивања добијамо тражену једнакост. □

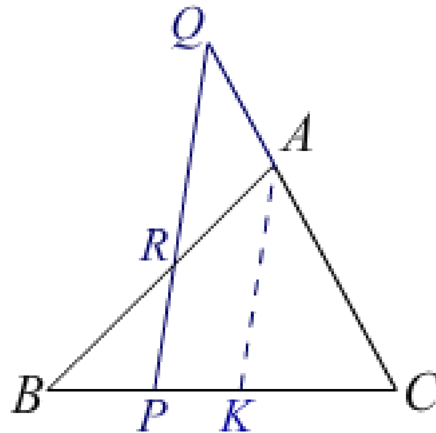
Доказ 3.3.24. На слици 6.36 је $AK \| QP$, $K \in BC$, па налазимо:

$$\Delta ABK \sim \Delta RBP \Rightarrow \frac{AR}{RB} = \frac{KP}{PB},$$
$$\Delta QCP \sim \Delta ACK \Rightarrow \frac{QC}{QA} = \frac{PC}{PK}.$$

Множећи ове једнакости, након сређивања добијамо:

$$\frac{AR}{RB}\frac{QC}{QA} = -\frac{PC}{PB},$$
$$\frac{AR}{RB}\frac{QC}{QA}\frac{PB}{PC} = -1,$$

а то је и требало доказати. □



Slika 6.36: Менелајева теорема

Тригонометрија

Рјешење 3.4.1. (а) За правоугли, египатски троугао страница $AB = c = 5$, $BC = a = 4$ и $CA = b = 4$ је $\sin\angle A = \frac{4}{5} = 0,8$. Инверзно $\angle A = \arcsin 0,8$, па је $\angle A = 53,1301^\circ = 53^\circ + 60 \times 0,1301' = 53^\circ + 7,80614' = 53^\circ + 7' + 60 \times 0,80614'' = 53^\circ + 7' + 48,3685''$. Дакле, оштри углови у теменима A и B су редом $\alpha = 53^\circ\, 7'\, 48''$ и комплементарно $\beta = 36^\circ\, 52'\, 12''$.

(б) То је правоугли троугао, јер је $5^2 + 12^2 = 13^2$, па је $\sin\alpha = \frac{5}{13} = 0,384615$. Инверзно: $\alpha = \arcsin 0,384615 = 22,6199^\circ = 22^\circ\, 37'\, 12''$, па је $\beta = 67^\circ\, 22'\, 48''$. □

Рјешење 3.4.4. Катета $CA_1 = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, па из правоуглог троугла A_2BC налазимо $(8 + x)^2 + 15^2 = 21^2$. Отуда $x = 6\sqrt{6} - 8 \approx 6,70$. □

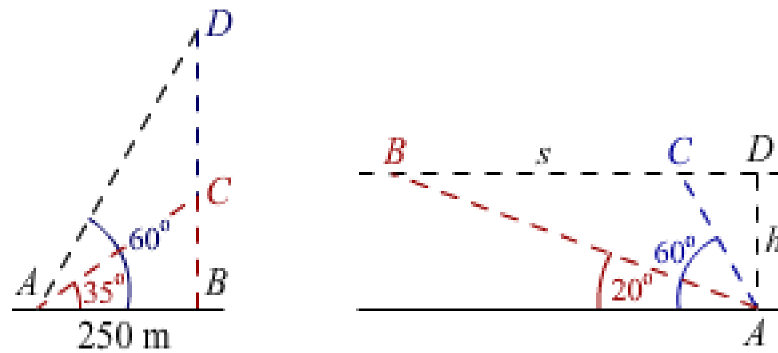
Рјешење 3.4.5. $BC = 5\operatorname{ctg} 30^\circ = 5\sqrt{3}$, $x = \sqrt{BC^2 + 9^2} = 2\sqrt{39} \approx 12,49$. □

Рјешење 3.4.6. На слици 6.37 лево, посматрач стоји на тлу у тачки A, а балон се креће вертикалом B–C–D удаљеном 250 метара од њега. Опажени углови елевације су $\angle BAC = 35^\circ$ и $\angle BAD = 60^\circ$. Висине су $BC = 250 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ$ и $BD = 250 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$, а затим налазимо $CD = BD - BC = 257,96$ m, пут који је балон прешао за две минуте. Брзина балона била је $128,98$ m/min односно $7,74$ km/h. □

Рјешење 3.4.7. За правоугле троуглове ΔCAD и ΔBAD углови у темену A су редом 30° и 70° па су дужине $CD = h \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$ и $BD = h \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$. Пут $s = BD - CD$ је авион прешао за време $t = 2$ min брзином $v = 900$ km/h, а због $s = vt$ биће:

$$h \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - h \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 900 \cdot \frac{1 \text{ km}}{60 \text{ min}} \cdot 2 \text{ min} = 30 \text{ km},$$

$$h = \frac{30 \text{ km}}{\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 13,824 \text{ km}.$$



Slika 6.37: Решавање правоуглих троуглова.

□

Рјешење 3.4.8. Из правоуглих троуглова ΔACD и ΔBCD (слика 3.24 лево) следи:

$$40 + x = h \cdot \operatorname{ctg} 30°, \quad x = h \cdot \operatorname{ctg} 60°,$$

$$40 = h(\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 60°),$$

а отуда $h = 34,64$ m и $x = 20$ m. □

Рјешење 3.4.9. Нека је на слици 3.24 десно тачка M висине врха T, тј. $MB = h$, али тако да је $B - M - A$. Из правоуглих троуглова ΔMTB и ΔMTA налазимо:

$$(MT = h \cdot \operatorname{ctg} \beta \ \wedge \quad MA = MT \cdot \operatorname{tg} \alpha) \ \Rightarrow \ MA = h \cdot \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Како је $h + MA = 2000$, биће:

$$h + h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 2000,$$

$$h(1 + \operatorname{tg} 15° \operatorname{ctg} 10°) = 2000,$$

а отуда $h = 793,8$ m. □

Рјешење 3.4.21. i. Из $\sin 3x = \frac{1}{2}$ следи $3x = 30°$, па $x = 10°$.

ii. Из $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следи $5x = 45°$, па $x = 15°$.

iii. Пребацујемо све сабирке на леву страну једнакости и растављањем на факторе налазимо $(\sin x - \frac{1}{2})(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$, а отуда два решења: $x_1 = 30°$ и $x_2 = 60°$.

iv. Добијамо $(\operatorname{tg} - \sqrt{3})(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}) = 0$, а отуда $x_1 = 60°$ и $x_2 = 30°$. □

Рјешење 3.4.22. i. Скратимо разломак са $\cos 2x$ и ставимо $t = \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$. Добијамо $\frac{2t-1}{t+1} = \frac{1}{2}t$, а отуда $(t-1)(t-2) = 0$. Решења су $x_1 = 22,50°$ и $x_2 = 31,72°$.

ii. Добијамо $(\operatorname{tg} 3x - 2)(\operatorname{tg} 3x - 3) = 0$, а отуда $x_1 = 21,14°$ и $x_2 = 23,86°$. □

Рјешење 3.4.24. За први ред добијамо функције $\operatorname{ctg} x = 2$ и $\operatorname{tg} x \in \{0, 4\}$, а за други: $\operatorname{tg} x = 3$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Углове израчунајте калкулатором. □

Рјешење 3.4.25. Овдје прихватљива решења су за прву и другу неједначину редом: $\operatorname{tg} x < 3$ и $\cos x > \frac{1}{4}$. Углове нађите сами. □

Рјешење3.4.32. Полазећи од (3.15) и особина парности косинусне функције $\cos(-v) = \cos v$, и непарности синусне функције $\sin(-v) = -\sin v$, налазимо:

$$\sin(u - v) = \sin[u + (-v)] = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

Полазећи од ове две и од идентитета $\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$, доказујемо формуле за косинус збира и разлике:

$$\cos(u \pm v) = \sin[90^\circ - (u \pm v)] = \sin[(90^\circ \pm u) \pm v] =$$

$$= \sin(90^\circ \pm u)\cos v \pm \cos(90^\circ \pm u)\sin v$$

$$= \cos(\mp u)\cos v \pm \sin(\mp u)\sin v$$

$$= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v.$$

□

Рјешење 3.4.33. Користећи све четири претходне формуле (3.16) доказујемо адиционе формуле за тангенс збира и разлике:

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\sin(u \pm v)}{\cos(u \pm v)} = \frac{\sin u \cos v \pm \cos u \sin v}{\cos u \sin v \mp \sin u \sin v} = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

У последњем кораку су бројник и називник „скраћени“ производом косинуса. □

Рјешење 3.4.34. i. Из $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ следии $\gamma = 75^\circ$. Из синусне теореме и адиционе формуле за синус (3.15) добијамо, редом:

$$a = 2R\sin\alpha = 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3},$$

$$b = 2R\sin\beta = 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$

$$c = 2R\sin\gamma = 4\sqrt{6} \cdot \sin(45^\circ + 30^\circ) =$$

$$= 4\sqrt{6} \cdot (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ),$$

$$= 4\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 2(3 + \sqrt{3}).$$

ii. Користимо другу једнакост косинусне теореме. Помоћу адиционих формула тражимо косинус тупог угла, затим страницу b:

$$\cos 105^\circ = \cos(60 + 45^\circ) =$$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 105^\circ = 3 + \sqrt{3}.$$

Затим, користимо синусну теорему, а синуси суплементних углова су једнаки:

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\sin 105^\circ = \frac{2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{9-3}\sin 75^\circ =$$

$$= \frac{6(\sqrt{3}-1)}{6}\sin(45^\circ + 30^\circ) = (\sqrt{3}-1)(\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ)$$

$$= (\sqrt{3}-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

па је $\alpha = 45^\circ$. Зато је $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 30^\circ$. Полупречник описане кружнице је

$$R = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{3+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} = 2\sqrt{6}.$$

iii. Из косинусне теореме добијамо $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 441$, тј. $a = 21$ cm. Из синусне теореме $2R\sin\alpha = a$ налазимо $R = 7\sqrt{3}$ cm. □

Рјешење 3.4.35. Дато је: $a - b = 3$ cm, $\gamma = 60^\circ$, $R = 7\sqrt{3}/3$. Синусна теорема даје $c = 2R\sin\gamma = 7$ cm. Затим косинусна:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60^\circ,$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0,$$

$$b^2 + 8b - 5b - 40 = 0,$$

$$(b - 5 + 5)(b + 8) = 0,$$

што је могуће за $b_1 = 5$ и за $b_2 = -8$. Само прво рјешење је геометријски прихватљиво, односно $b = 5$ cm. Затим налазимо $a = b + 3 = 8$ cm. □

Рјешење 3.4.36. Имамо троугао ABC са страницама $b = 8$ и $c = 5$, и углом у темену $\angle A = 60^\circ$. Према косинусној теореми је:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$a^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2},$$

па налазимо страницу $a = BC = 7$ cm. Затим, према синусној теореми:

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sqrt{3}/2} = \frac{14\sqrt{3}}{3} \approx 8,08 \text{ cm}.$$

Тражени полупречник је $R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4,04$ cm. □

Рјешење 3.4.39. Полазимо од слике 3.8 гдје се види да је површина троугла $\mu = \frac{1}{2}ah_a$.

1. Из центра уписане кружнице $k(S,r)$ нормала на страницу $a = BC$ троугла је дужине полупречника, она је висина троугла SBC, па је површина тог троугла $\mu(\Delta SBC) = \frac{1}{2}ar$. Аналогно $\mu(\Delta SCA) = \frac{1}{2}br$ и $\mu(SAB) = \frac{1}{2}cr$. Збир ове три површине је тражено $\mu_1 = rs$.

2. Херонов образац. Из темена C повуцимо висину $h = CD \perp AB$ на страницу AB, на којој она прави одсјечке $p = BD$ и $q = AD$. Из $q = c - p$ следи $q^2 = c^2 - 2cp + p^2$, па додавањем h^2 на обе стране $h^2 + q^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$. Због Питагорине теореме $h^2 + p^2 = a^2$ и $h^2 + q^2 = b^2$ добијамо $b^2 = a^2 + c^2 - 2cp$. Отуда $p = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$ које можемо вратити у $h^2 = a^2 - p^2$, затим растављамо на факторе:

$$h^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2} = \frac{[2ac-(a^2+c^2-b^2)][2ac+(a^2+c^2-b^2)]}{4c^2},$$

$$h^2 = \frac{[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]}{4c^2} = \frac{[(b-a+c)(b+a-c)][(a+c-b)(a+c+b)]}{4c^2},$$

$$\frac{1}{4}h^2c^2 = \frac{b-a+c}{2}\cdot\frac{b+a-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+c+b}{2} = (s-a)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot s,$$

$$\frac{1}{2}hc = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

тј. μ_2 је тачно.

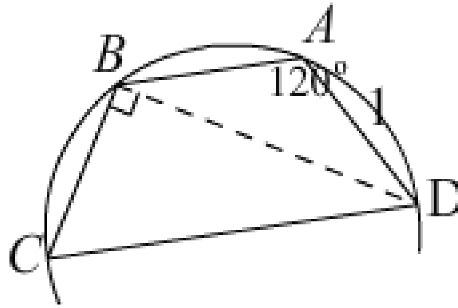
3. Из темена A повуцимо висину $h_a = AE \perp BC$. Из правоуглог троугла AEC имамо $h_a = b\sin\gamma$, па површина ΔABC износи $\mu_3 = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, што је и требало доказати.

4. Применимо синусну теорему, део $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, на претходну формулу. За површину троугла ABC добијамо $\mu_4 = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. □

Рјешење 3.4.41. Дати четвороугао је на слици 6.38. Из $BD \perp BC$ и $\angle ABC = 120°$ следи $\angle ABD = 30°$ и $\angle BCD = 60°$. Троугао ABD је једнакокрак, па је и $AB = 1$. Из троугла ABD, помоћу косинусне теореме $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos 120°$, гдје је $\cos 120° = \cos(60° + 60°) = \cos 60°\cos 60° - \sin 60°\sin 60°$, тј.

$$\cos 120° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2},$$

па налазимо $DB^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 120° = \sqrt{3}$. Збирови наспрамних углова тетивног четвороугла су једнаки, па је $\angle BCD = 60°$, $\angle CDB = 30°$, а из правоуглог троугла ΔBCD добијамо $CD = 2$. □



Slika 6.38: Тетивни четвороугао.

Подударност

Рјешење 4.1.2. Дати су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ такви да је $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ и $CD = C'D'$, гдје су тачке D и D' подножја висина на странице AB и $A'B'$.

Нека је $AC > BC$. Према ставу SSU важи $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$, јер два троугла имају једнаку по једну катету и хипотенузу, а прави угао је наспрам дуже. Отуда $\angle B = \angle B'$, а затим опет према ставу SSU биће $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Ако је $AC < BC$, онда прво приметимо подударност $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$, па коначну. Ако је $AC = BC$, приметимо да важе обе прве подударности, а затим коначна. □

Рјешење 4.1.3. Нека су дати ΔABC и $\Delta A'B'C'$, и нека је $c = AB = A'B' = c'$, $h_c = D = A'D' = h_c'$, $t_c = AE = A'E' = t_c'$, гдје су h_c и t_c редом висина и тежишница из темена C на страницу c.

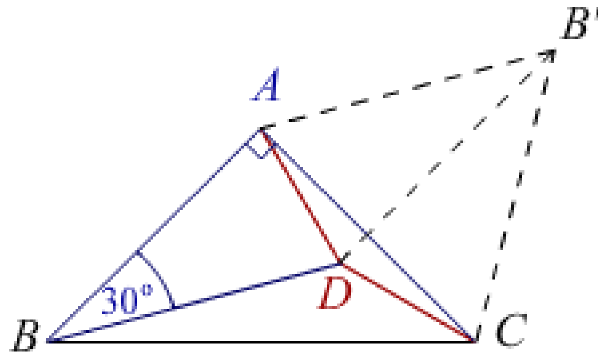
Према SSU је $\Delta CDE \cong \Delta C'D'E'$, па два троугла имају једнак угао $\angle BEC$. Како је BE пола странице BA, то из SUS следи $\Delta BCE \cong \Delta B'C'E'$, а отуда $a = B'C' = BC = a'$. Дакле, међу подударне елементе су и угао $\angle ABC$ и страница BC, па из SUS следи $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Рјешење 4.1.6. Према ставу SUS важи подударност $\Delta A_1CA \cong \Delta BCB_1$, јер је $A_1C = BC$, $CA = CB_1$ и $\angle A_1CA = 60° + \gamma = \gamma + 60° = \angle BCB_1$. Отуда $AA_1 = BB_1$. Аналогно доказујемо $AA_1 = CC_1$. □

Рјешење 4.1.9. Дати троугоао ΔABC је приказан на слици 6.39. Изван њега додајмо тачку B' тако да је $\Delta ABD \cong \Delta AB'D$.

Како је $\angle BDA = \angle BAD = 75°$, биће $\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 15°$. Због $\angle CAB' = 75° - 15° = 60°$ и $AC = AB'$ троугао $\Delta ACB'$ је једнакостраничан. Даље, из $\angle AB'D = 30°$ је $B'D \perp AC$ па је четвороугао $ADCB'$ делтоид, тј. $AD = DC$, што је и требало доказати. □

Рјешење 4.1.10. Са стране темена A на страницу BC конструишимо тачку N тако да је $\Delta MNC \cong \Delta ACB$. Нацртај слику!



Slika 6.39: Ако је $AC = AB = BD$, тада је $DA = DC$.

Имамо $\angle ACB = 20°$, $\angle NCM = 80°$, па је $\angle NCA = 80° - 20° = 60°$. Отуда је ΔACN једнакостраничан. Зато је $\angle ANM = 60° - 20° = 40°$. Како је $NA = NM$ биће $\angle NMA = \angle NAM = \frac{180°-40°}{2} = 70°$ и $\angle AMC = \angle AMN + \angle NMC = 70° + 80° = 150°$. Према томе $\angle AMB = 180° - \angle AMC = 180° - 150° = 30°$. □

Рјешење 4.1.11. Конструишимо ΔBCF подударан ΔADE, тако да је $A - D - C - F$.

Из $DE + AC = 4$ следи $CF + AC = AF = 4$. Из подударности следи и $\angle CBF = \angle A = 30°$. Према томе $CF = BF \cdot \sin 30° = BF/2 = AF \cdot \sin 30°/2 = AF/4 = 4/4 = 1$. Дакле, $DE = CF = 1$. □

Рјешење 4.1.12. Нека су тачке D и E подножја висина редом из темена A и B. У правоуглим троугловима ΔADC и ΔBEC је $\angle CAD + \angle C = 90°$ и $\angle CBE + \angle C = \angle DBH + \angle C = 90°$. Отуда $\angle CAD = \angle DBH$, а због датог $BH = AC$, следи $\Delta ADC \cong \Delta BDH$. Према томе је $AD = BD$ а троугао ΔBDA је једнакокрак правоугли. Зато је $\angle ABC = 45°$. □

Рјешење 4.1.13. Продужимо страницу AB до тачке E, тако да је $A - P - B - E$ и $BE = DQ$. Спојимо EC, а означимо $AP = x$ и $AQ = y$. Тада је $PB = 1 - x$ и $DQ = BE = 1 - y$. Очигледна је подударност $\Delta CDQ \cong CBE$, па је $\angle DCQ = \angle BCE$ и $\angle QCE = 90°$. Из датог услова $PQ + x + y = 2$ следи $PE = (1-x) + (1-y) = 2 - (x+y) = PQ$, па је $\Delta PCQ \cong \Delta PCE$. Према томе, $\angle PCQ = \angle PCE = \frac{1}{2}\angle QCE = 45°$. □

Рјешење 4.1.14. Троуглови ΔABD и ΔACE су једнакостранични, $AD = AB$ и $AC = AE$ и $\angle DAC = 60° + \angle BAC = \angle BAE$. Отуда $\Delta DAC \cong \Delta BAE$, према SUS. Затим $\angle ADC = \angle ADP = \angle ABE = \angle ABP$. Оба угла $\angle ADP = \angle ABP$ гледају на исту дуж AP, што значи да је она тетива кружнице која пролази тачкама A, D, B, P. У тој кружници су једнаки и периферни углови $\angle APD = \angle ABD = 60°$. □

Рјешење 4.1.15. Из SSS следи $\Delta ADC \cong \Delta BDC$, па је $\angle ACD = \angle BCD$. Отуда $\angle ACD = \angle BCD = 30°$. Због $BE = AB = BC$, $\angle DBE = \angle DBC$ и $BD = BD$, је $\Delta BDE \cong \Delta BDC$. Тако налазимо $\angle E = \angle BCD = 30°$. □

Рјешење 4.1.19. Приметимо да је дат је ортички троугао $\Delta A_1B_1C_1$ датог троугла ΔABC и употребимо задатак 3.3.6. Симетрале углова ортичког су висине главног троугла и у њиховом пресеку је ортоцентар H траженог троугла. Конструишемо нормале $BC \perp HA_1$, $CA \perp HB_1$ и $AB \perp HC_1$. Пресеци нормала су темена A, B, C. □

Рјешење 4.1.20. Користимо задатак 3.3.6, гдје је показано да висина CD на хипотенузу дијели ту страницу правоуглог троугла ABC на одсјечке AD и BD тако да је $CD^2 = AD \cdot BD$.

Пренесемо дате дужи $AD = a$ и $DB = b$ тако да је $A - D - B$. Конструишемо кружницу са пречником AB и повучемо нормалу на праву AB у тачки D. Пресек кружнице и нормале је тачка C, а дуж $CD = \sqrt{ab}$. □

Рјешење 4.1.21. Медијана полови хипотенузу, па је $c^2 = 4ab$, гдје су a, b катете. Али, двострука површина овог троугла је ab, али и ch_c, гдје је h_c висина на хипотенузу, одакле $c = 4h_c$. Према томе, конструишемо кружницу са пречником c и паралелу са c на удаљености $c/4$. Оба пресека кружнице и паралеле су по једно рјешење за теме правог угла траженог троугла. □

Решења 4.1.22. i) Нека су AA_1 и CC_1 редом висине из темена A и C траженог троугла, а нека је A' средина странице наспрам темена A. Средину дужи BC_1 означимо са A'' и приметимо да је $A'A''$ средња линија ΔBCC_1. Отуда $A'A'' \perp AB$ и $A'A'' = \frac{1}{2}h_c$. Троугао $\Delta A''A'A$ можемо конструисати јер му познајемо две странице $A''A', AA'$ и прав угао у темену A''. Можемо конструисати и троугао $\Delta AA_1A'$, а затим и ΔABC.

ii) Подножје висине из темена A означимо A_1, а средину странице BC са A'. Можемо конструисати правоугли троугао $\Delta AA_1A'$, а затим из тачке A' продужити страницу A_1A' на обе стране за $\frac{1}{2}a$.

iii) Конструисати кружницу са које се дата дуж a види под датим углом α. Повући паралелу са a на удаљености h_a.

iv) Конструисати паралелу са датом дужином $AD = a + c$ на удаљености h_c. Пресек кружнице $k(A, b)$ и паралеле је теме C. Симетрала дужи CD пресеца AD у тачки B. □

Решења 4.1.23. i) На крајевима дате дужи $DE = 2s$ конструисати половине датих углова $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\beta$. Краци тих углова се секу у тачки C. Симетрале дужи DC и EC секу праву DE у тачкама A и B.

ii) Можемо конструисати ΔBCD, гдје је $CD = b - c$, са унутрашњим угловима $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$ и $\angle D = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Конструишемо угао $\angle CBp$, а пресек полуправе p и продужетка дужи CD је тачка A.

iii) Пренесемо дату дуж $AB = c$ и конструишемо угао $\angle BAp = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Са центром у B опишемо кружницу полупречника $a - b$, чији пресек са p је тачка D. Симетрала дужи AD и права BD секу се у тачки C.

iv) На крају дужи $BC = a$ конструишемо угао $\angle BCp = 90^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}$. Конструишемо кружницу са центром у B и полупреником $b + c$. Пресек полуправе p и кружнице је тачка D. Симетрала дужи CD сече праву BD у тачки A. □

Рјешење 4.1.24. i. Нека је S центар уписаног круга ΔABC. Тада је $\angle BSC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, страница $BC = a$, а дата је и висина r троугла BCS који зато можемо конструисати. Затим, удвостручимо углове $\angle CBp = 2\angle CBS$ и $\angle BCq = 2\angle BCS$. Пресек крака p и q је тачка A. □

Рјешење 4.1.25. Нека су у траженом квадрату $ABCD$ дати теме A и тачке $M \in BC$ и $N \in CD$. Означимо са $\phi = \angle BAN$. Тада је $\angle NAD = 90^\circ - \phi = \theta$. Нека је на продужетку странице BC тачка P, тако да је $C - B - P$ и $\angle PAB = \theta$, биће $\Delta ABP \cong \Delta ADN$. Према томе $\angle PAN = 90^\circ$ и $PA = AN$.

Конструишемо прво угао $\angle NAx = 90^\circ$, на полуправој x налазимо тачку $P \in x$ такву да је $PA = AN$. Сада знамо $P - B - M - C$, па из N конструишемо нормалу на ту праву, а из темена A нормале на обе, чија подножја су тачке B и C. □

Рјешење 4.1.26. Анализа.

Нека је у датом паралелограму $ABCD$ тачка S пресек дијагонала AC и BD. Дијагонале се полове, па је NS је средња линија троугла BCD паралелна BC и једнака половини те дужи, а MS је средња линија истог троугла паралелна CD и једнака њеној половини. Четвороугао $MCNS$ је паралелограм.

Нека је $P = SC \cap MN$. Тачка P је пресек дијагонала паралелограма $MCNS$ и дијели дуж MN (као и дуж CS) на два једнака дела. Нека је $R = p(N,S) \cap AB$, тј. пресек праве NS и дужи AB. Тада је $\angle ASR = \angle NSC$, $\angle ARS = \angle SNC$ и $AS = SC$, па због става UUS имамо подударност $\Delta ARS \cong \Delta CNS$, а отуда $AR = CN$. Нека је $Q = SR \cap AM$. Тада имамо подударност $\Delta ARQ \cong \Delta MSQ$, а отуда $AQ = QM$. Дакле, тачка S је тежиште троугла ΔAMN.

Конструкција.

Тачку S можемо конструисати а тиме и праве $p(N,C)$ и $p(M,C)$. Затим можемо наћи тачке B и D па тиме и паралелограм $ABCD$. □

Рјешење 4.1.27. Анализа.

Нека је дат квадрат $ABCD$ са центром описане кружнице S и тачкама $M \in BC$ и $N \in AB$. Нека су пресеци правих $p(M,S) \cap AD = M'$, $p(N,S) \cap CD = N'$ и нека су S', S'' редом средине страница BC, CD. Дужи SS' и SS'' су средње линије троуглова ΔDBC и ΔACD па је $SS' = SS''$. Аналогно је $MS = M'S$ и $NS = N'S$.

Нека је тачка $P \in CD$ таква да је $SP \perp MM'$. Означимо са $\phi = \angle PSS''$, па је $\angle PSS' = 90^\circ + \phi$ и $\angle MSS' = \phi$. Такође је $\Delta SS'M \cong \Delta SS''P$, те $SM = PS$.

Конструкција.

Дате су тачке M и S, па можемо конструисати дуж MM', затим и тачку P. Зато што можемо конструисати и дуж NN', можемо и квадрат $ABCD$. □

Рјешење 4.1.28. Нека је тачка P у унутрашњости троугла ΔABC из које се све три странице виде под истим углом ϕ. Из $3\phi = 360^\circ$ следи $\phi = 120^\circ$. Око троуглова ΔPBC, ΔPCA и ΔPAB опишимо кругове редом $k_a(O_a, r_a)$, $k_b(O_b, r_b)$ и $k_c(O_c, r_c)$.

Тетива BC из троугла са кружнице k_a види се под периферним углом $\phi = \angle BPC = 120^\circ$, док се са исте кружнице али изван троугла она види под суплементним углом 60°, па је централни угао над том тетивом $\angle BO_aC = 120^\circ$. Оштри углови

у једнакокраком троуглу ΔBO_aC су по $30°$. Аналогно налазимо за остале две кружнице.

Према томе, са познатим троуглом ΔABC могуће су конструкције кружница $k_a(O_a, r_a)$, $k_b(O_b, r_b)$ и $k_c(O_c, r_c)$, а затим и налажење њиховог пресека, тражене тачке P. □

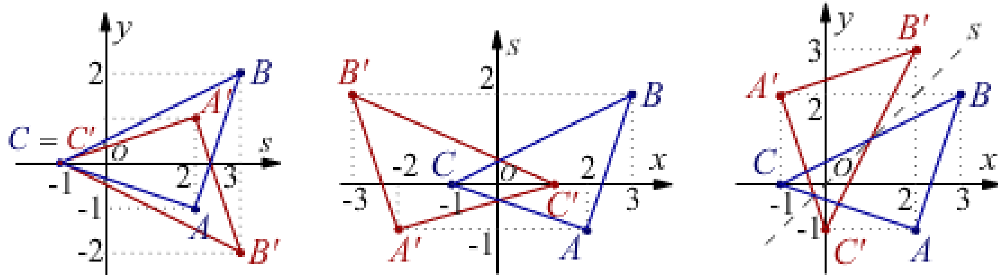
Изометрије

Рјешење 4.2.2. На сликама 6.40 видимо следеће три рефлексије.

i. $\rho_x : A(2,-1), B(3,2), C(-1,0) \to A'(2,1), B'(3,-2), C'(-1,0)$.

ii. $\rho_y : A(2,-1), B(3,2), C(-1,0) \to A'(-2,-1), B'(-3,2), C'(1,0)$.

iii. $\rho_{y=x} : A(2,-1), B(3,2), C(-1,0) \to A'(-1,2), B'(2,3), C'(0,-1)$. □



Slika 6.40: Рефлексија око симетрале s: апсцисе, ординате и праве $y = x$.

Рјешење 4.2.4. Случај када су тачке са разних страна праве је тривијалан, тада је рјешење $A - P - B$.

Случај када су тачке A и B са исте стране праве p видимо на слици 6.41 лево. Након рефлексије $\rho_p : B \to B'$ налазимо пресек $P = p \cap AB'$. Да је пут $AP + PB$ заиста најкраћи доказујемо овако.

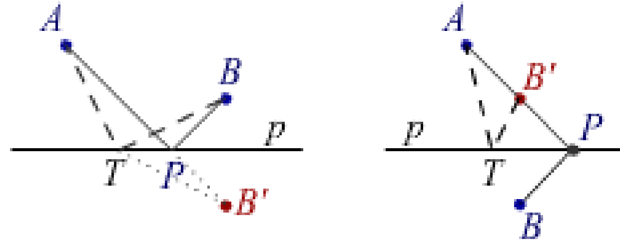
Узмимо произвољну тачку $T \in p$ и посматрајмо троугао ATB'. Према неједнакости троугла (в. примјер 3.3.14) биће

$$AB' \le AT + TB',$$

$$AP + PB' \le AT + TB,$$

$$AP + PB \le AT + TB,$$

гдје неједнакост постаје једнакост акко $T = P$. Пут од A до B преко $P \in p$ је заиста најкраћи могући. □



Slika 6.41: Рефлексије $\rho_p : B \to B'$.

Рјешење 4.2.5. Случај када су тачке са истих страна праве је тривијалан. Ако је тачка A даља од праве, рјешење је $A-B-P$.

Случај када су тачке A и B са разних страна праве p видимо на слици 6.41 десно. Након рефлексије $\rho_p : B \to B'$ налазимо пресек $P = p \cap AB'$. Да је разлика дужина $|AP - BP|$ заиста најкраћа доказујемо овако.

Узмимо произвољну тачку $T \in p$ и посматрајмо троугао ATB'. Према неједнакости троугла биће:

$$AT \le AB' + TB', \quad TB' \le AB' + AT,$$

$$|AT - TB'| \le AB',$$

$$|AT - B'T| \le |AP - B'P|,$$

што значи да пут преко тачке $P \in p$ максимизира дату разлику. □

Рјешење 4.2.6. i. Конструисати кружницу k' чији је пречник OA, гдје је O центар датог круга $k(O,r)$, а A је дата тачка. Пресеци ових кружница су највише две тачке $k \cap k' = \{T_1, T_2\}$, а тражене тангенте су праве AT_1 односно AT_2.

ii. Дате су кружнице $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Конструишемо већу кружницу $k'(O_2, r_1 + r_2)$ и на њу повучемо тангенту (тангенте) t' из тачке O_1, на претходни начин. На удаљености r_1 од те тангенте повучемо паралелу t. Паралела $t \| t'$ је тражена унутрашња тангента двеју датих кружница. □

Рјешење 4.2.7. i. Конструишимо тангенту на кружницу $k(O,r)$ у њеној тачки K. Конструишимо симетралу s угла између тангенте и дате праве a. Пресек праве KO и симетрале s је центар O' траженог круга $k'(O', r')$. Полупречник је $r' = KO'$.

ii. Конструишемо нормалу n на праву a у тачки A. Са стране праве a на којој није центар кружнице $k(O,r)$ конструишемо тачку $N \in n$ такву да је $NA = r$. Конструишемо симетралу s дужи ON. Пресек симетрале s и нормале n је тачка O' која је центар траженог круга $k'(O', r')$. Полупречник $r' = O'A$. □

Доказ 4.2.8. Показаћемо да су троуглови ABC и $A'B'C'$ на слици 4.7 подударни. Из $\angle BOB' = \angle AOA' = \omega$ следи:

$$\angle A'OB' = \angle BOB' - \angle BOA' = \angle AOA' - \angle BOA' = \angle AOB,$$

дакле $\angle A'OB' = \angle AOB$. Даље, због $OA = OA'$ и $OB = OB'$ и става SUS имамо подударности $\Delta AOB \cong \Delta A'OB'$, те $AB = A'B'$. Слично доказујемо једнакост остала два пара страница, па према ставу SSS имамо подударност $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. □

Рјешење 4.2.9. Тачка $\rho : A \to A'$ ротира по кружници, тако да је AA' тетива, па је центар O те кружнице на симетрали тетиве. Исто је са другом тачком $\rho : B \to B'$. Пресек две симетрале је центар ротације O, а угао ротације је $\omega = \angle AOA'$. □

Рјешење 4.2.11. Анализа. Праве, одозго на доле су $a||b||c$ на (не)једнаким међусобним растојањима. Ако су три темена $A \in a$, $B \in b$ и $C \in c$ троугла (четвороугла) на те три праве, онда ротацијом око средњег, око тачке B за угао $60°$ ($90°$) преводимо C у A.

Конструкција. Бирамо произвољно $B \in b$ и ротирамо $\rho(B, \omega) : c \to c'$, гдје је угао $\omega = 60°$ за једнакостранични троугао, односно $\omega = 90°$ за квадрат. Добијамо $A = c \cap c'$, а затим лако налазимо треће (и четврто) теме. □

Рјешење 4.2.16. Задатак има решења само када је $r < OA \le 2r$. Конструишемо још једну кружницу $k'(O', r)$ истог полупречника али такву да садржи дату тачку A и да додирује дату кружницу $k(O, r)$ у тачки $B = k' \cap k$. Ради тога, конструишемо две кружнице, а њихов пресек је центар $O' = k_1(O, 2r) \cap k_2(A, r)$. Централна симетрија $\rho_B : A \to C$ даје тражену тачку C. Нема решења ако је тачка A предалеко, tj. $OA > 2r$, има једно рјешење када је $OA = 2r$, а два решења када $r < OA < 2r$. □

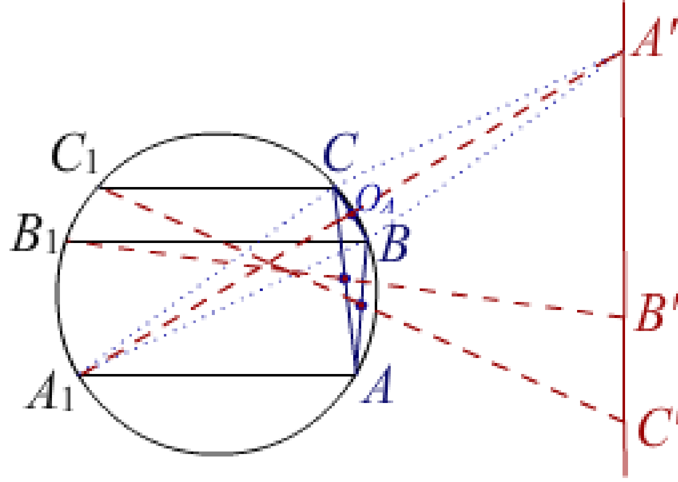
Рјешење 4.2.17. Претпоставимо да је задатак решен и скицирајмо одговарајућу слику. Централном симетријом $\rho_S : b \to b'$, налазимо паралелну праву $b'||b$ а пресек $b' \cap a = A$. Дакле, $A - S - B$ и $AS = SB$. Конструкција је даље тривијална. □

Рјешење 4.2.18. Због централне симетрије $\rho_o : A_1 \to A'$, око тачке O_A која је средиште дужи BC, дијагонале четвороугла $A_1BA'C$ се полове. Према томе, тај је четвороугао паралелограм, а затим $CA'||A_1B$ и $CA' = A_1B$ као што се види на слици 6.42. Аналогно је $CB'||B_1A$ и $CB' = B_1A$. Зато је троугао $A'B'C$ једнакокрак и $A'B' \perp C_1C$. Слично следи за пар $AA_1||CC_1$, па су тачке A', B', C' колинеарне. □

Рјешење 4.2.19. i. Непосредна последица централне симетрије. ii. O_1O_2 је средња линија троугла AA_1A_2. □

Рјешење 4.2.20. Нека је $\rho_1 : A \to A_1$, $\rho_2 : A \to A_1'$ и $\rho_2 : A_1 \to A_2$, $\rho_1 : A_1' \to A_2'$. Нацртај слику! Тада је четвороугао $AA_1A_1'A_2$ паралелограм, јер му се дијагонале полове у тачки O_2. Такође, четвороугао $AA_2'A_1A_1'$ је паралелограм, јер му се дијагонале полове у тачки O_1. Међутим, оба имају исту страницу A_1A_1' којој су наспрамне AA_2 и $A_2'A$. Према томе, дужи AA_2 и $A_2'A$ су паралелне, једнаких дужина, али су супротно усмерене. □

Рјешење 4.2.21. Нека су дати троуглови $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ такви да је $AB||A'B'$, $BC||B'C'$ и $CA||C'A'$. Тада је вектор транслације $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = 2 \cdot \overrightarrow{OO'}$. Транслација је композиција две симетрије са центрима O и O' редом, гдје је прва



Slika 6.42: Централне симатрије $\rho_o : X_1 \to X'$.

тачка почетак а друга врх вектора $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\vec{v}$. Тај вектор може бити било гдје у простору. Задатак има бесконачно много решења. □

Рјешење 4.2.28. Нека је $AB > A_1B_1$. Транслацијом за вектор $\overrightarrow{CB}$ преносимо троугао SD_1C_1 у $S'D_1'C_1'$ и дуж CD у дуж BA. Како је

$$QA_1 : QA = A_1B_1 : AB = S'D_1' : SA$$

биће $QS' \| A_1D_1$. Отуда $QS \| AD$. Аналогно је $PR \| AB$. □

Хомотетија

Рјешење 4.3.2. Из датих услова следи $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, а затим:

$$\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA'} = \lambda(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}),$$

$$\overrightarrow{SB'} - \lambda \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA'} - \lambda \cdot \overrightarrow{SA}.$$

Сабирци на левој страни су колинеарни, а такође и на десној страни. Међутим, на левој и десној страни су неколинеарни вектори. То је могуће једино у случају да су на обе стране нула вектори. Отуда:

$$\overrightarrow{SB'} - \lambda \cdot \overrightarrow{SB} = 0, \quad \overrightarrow{SA'} - \lambda \cdot \overrightarrow{SA} = 0,$$

$$\overrightarrow{SB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SB}, \quad \overrightarrow{SA'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SA},$$

а то је оно што је требало доказати. □

Рјешење 4.3.3. Према претпоставци, пресликавање f је бијекција[25].

i. Нека f пресликава A у A' и B у B'. Тада

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'},$$

што значи да је f транслација.

ii. Посматрајмо три неколинеарне тачке A, B, C и њихове слике редом A', B', C' добијене пресликавањем f. Све три праве AB, BC и CA се не могу поклапати са правама $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ редом, јер би тада било $A = A'$, $B = B'$ и $C = C'$. Нека је $AB \neq A'B'$. Праве AA' и BB' нису паралелне јер би тада четвороугао $ABB'A'$ био паралелограм и било би $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Нека је O пресек правих AA' и BB'. Како за темена $X \in \{A, B\}$ троуглова AOB и $A'OB'$, тако и за произвољну тачку X важе једнакости

$$\overrightarrow{Of(X)} = \overrightarrow{f(O)f(X)} = \lambda \cdot \overrightarrow{OX},$$

што значи да је f хомотетија са центром O. □

Рјешење 4.3.4. Нека је $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$, гдје су $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ хомотетије са центрима O_1 и O_2 и коефицијентима λ_1 и λ_2 редом. Означимо:

$$A' = \mathcal{H}_1(A), \quad B' = \mathcal{H}_1(B), \quad A'' = \mathcal{H}_2(A'), \quad B'' = \mathcal{H}_2(B').$$

Тада је $\overrightarrow{A'B'} = \lambda_1\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A''B''} = \lambda_2\overrightarrow{A'B'} = \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{AB}$. Из претходног задатка следи да је за $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ трансформација $\mathcal{H}$ хомотетија са коефицијентом $\lambda_1\lambda_2$, а ако је $\lambda_1\lambda_2 = 1$ тада је та трансформација транслација.

Преостаје да проверимо да фиксна тачка F трансформације $\mathcal{H}$ припада дужи која спаја центре датих хомотетија. Из $\overrightarrow{O_1A'} = \lambda_1\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2A''} = \lambda_2\overrightarrow{O_2A'}$ следи:

$$\overrightarrow{O_2A''} = \lambda_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A'}) = \lambda_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \lambda_1\overrightarrow{O_1A}),$$

$$\overrightarrow{O_2A''} = \lambda_2\overrightarrow{O_2O_1} + \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{O_1O_2} + \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{O_2A}.$$

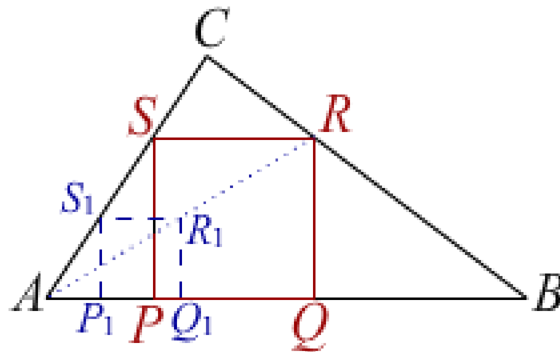
За фиксну тачку F добијамо једначину

$$\overrightarrow{O_2F} = (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2)\overrightarrow{O_1O_2} + \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{O_2F}.$$

Према томе $\overrightarrow{O_2F} = \lambda\overrightarrow{O_1O_2}$, гдје је $\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2}{1 - \lambda_1\lambda_2}$. □

Рјешење 4.3.5. Конструишемо помоћни квадрат $P_1Q_1R_1S_1$, такав да $P_1, Q_1 \in AB$ и $S_1 \in AC$, као на слици 6.43. Затим теме R_1 пресликамо хомотетично у $R \in BC$, што је страница траженог квадрата. □

[25] Бијекција је инјекција и сурјекција, тј. обострано једнозначно пресликавање.



Slika 6.43: Пресликавање хомотетијом из центра A.

Рјешење 4.3.6. Конструишемо произвољан квадрат $AB_1C_1D_1$ и са $S_1 \in C_1D_1$ означимо средину странице наспрам тачке A. Пренесемо дату дуж $\overline{AS} = d$ на праву AS_1. Имамо тачку S која је средина странице CD. Хомотетијом са центром у A пресликамо остала темена квадрата $A_1B_1C_1D_1$ у темена траженог квадрата $ABCD$.

Наиме, конструишемо паралелу $CD \| C_1D_1$ хомотетијом, затим $BC \| B_1C_1$ и имамо тражени квадрат $ABCD$. □

Рјешење 4.3.7. На симетрали датог угла s_A бирамо произвољну тачку $O' \in s_A$ и конструишемо кружницу k' са центром O' која тангира краке b, c. Хомотетијом $\mathcal{H}_A : k' \to k$ са центром A пресликамо кружницу k' у кружницу k која садржи тачку M. Практично, бирамо једну од тачака пресека $AM \cap k' = M'$ и тражећи паралелу $OM \| O'M'$ нађемо центар O и полупречник OM кружнице k. □

Рјешење 4.3.8. Конструишимо кружницу k_1' са центром на симетрали унутрашњег $\angle A$ тако да додирује обе странице AB и AC датог троугла ABC. Затим, конструишемо кружницу k_2' истог полупречника, која додирује k_1' и страницу AB. Конструишемо паралелу $a' \| BC$ која тангира кружницу k_2' и не сече кружницу k_1'. Хомотетијом са центром A пресликамо праву a' у праву BC. Иста хомотетија пресликава кругове k_1', k_2' тражене кругове k_1, k_2. □

Рјешење 4.3.9. i. Средине страница (произвољног) четвороугла $ABCD$ су темена паралелограма. Наиме, нека су средине страница AB, BC, CD, DA редом P, Q, R, S. Тада је PQ средња линија троугла ABC, а RS је средња линија троугла CDA. Обе су паралелне својим основицама, дијагонали AC четвороугла и једнаке половини њене дужине. Према томе $PQ \| RS$ и $\overline{PQ} = \overline{RS}$. Исто добијамо за остале две странице, па је четвороугао $PQRS$ паралелограм.

ii. Хомотетија са центром пресеком дијагонала четвороугла са коефицијентом $3/2$ копира тежишта у средине страница четвороугла. Затим следи i. □

Рјешење 4.3.10. i. Хомотетија са центром K шаље ΔKDC у ΔKAB, тачку N у M. Отуда су K, M, N колинеарне тачке. Хомотетија са центром L шаље AB у DC и M у N. Према томе, и тачка L припада правој MN.

ii. Права линија KL пролази средином дужи AB и према претпоставци дијели угао $\angle AKB$ на два једнака дела. Из теореме 3.2.16 следи, ако је симетрала угла тежишница троугла онда је троугао једнакокрак. Према томе, троугао AKB је једнакокрак, па је једнакокрак и дати трапез. □

Рјешење 4.3.11. Хомотетија са центром T и коефицијентом -2 шаље линије PA_1, PB_1 и PC_1 редом у линије ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C тако да је тачка Q слика P. □

Рјешење 4.3.12. Хомотетијом са центром A пресликајмо дуж BC у дуж $B'C'$ која тангира описану кружницу k_o у тачки $D' \in B'C'$. Троуглови ΔAPO_u и $\Delta ABD'$ су правоугли, а поменута хомотетија пресликава први у други. Затим, важи

$$AS : AO = AB : AB',$$

а отуда је $O_u = S$, што је и требало доказати. □

Рјешење 4.3.13. Нека је T тежиште троугла ABC, а C_1 средина странице AB. Тада је увек $CC_1 = 3 \cdot TC_1$, што значи да је C_1 центар хомотетије са коефицијентом 1/3 којом се дата кружница пресликава у геометријско место тачака T. □

Рјешење 4.3.14. Нека је круг $k_1(O_1, r_1)$ мањи од $k_2(O_2, r_2)$, тј. $r_1 < r_2$, као на слици 6.44. Вањске тангенте t_1, t_2 на обе кружнице, секу се у тачки O_3, која је центар кружнице k_3 полупречника O_3C и центар хомотетије $\mathcal{H} : k_1 \to k_2$. Иста хомотетија, тачку $C \in k_1$ пресликава у $C' \in k_2$, тако да је CC' пречник круга k_2. Зато је $\angle C'BC = 90°$, те $BC' \| AC$. Према томе $\mathcal{H} : A \to B$, те је $\angle CDO_3 = \angle CDB = 90°$. Знамо да је угао над пречником прав, па је $O_3C = 2r$ пречник кружнице $k(O, r)$ којој припада тачка D. Јасно је да $D \in k$ само у оном делу те кружнице између тангенти t_1 и t_2 заједно са тачком C. □

Рјешење 4.3.15. i. Хомотетија са центром B копира уписани круг k у вани дописани круг k' на страницу AC и копира тачку E у тачку E'. Тачка E' је крајња тачка пречника окомитог на AC, ра је E' тангентна тачка круга дописаног на страницу AC, праве BE и AC се секу у E'. Отуда, $F = M'$ и E је тангентна тачка дописаног круга на страницу AC. Затим израчунавамо $AF = \frac{1}{2}(a + b - c) = CD$, гдје су a, b и c дужине страница троугла ABC (в. задатак 3.2.20).

ii. Хомотетија са центром P пресликава линију EH у тангенту на дати круг. Она шаље тачке E, F, K, H у тачке E', F', K', H' редом. Према претходном (i. $E'F' = K'H'$), сада је $EF = KH$. □

Рјешење 4.3.16. Према решењу претходног задатка 4.3.15 i: ако је DE пречник датог круга, а права BE сече страницу AC у тачки F, онда је $AF = DC$. Отуда $B_1F = B_1D$, а затим следи да је B_1O тежишница троугла MFD. □

Slika 6.44: Геометријско место тачака D.

Рјешење 4.3.17. Нека су тачке A, B и C редом пресеци ваањских тангенти на кругове k_1, k_2, затим k_2, k_3 и k_3, k_1. Тада су A, B и C центри хомотетија:

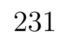
$$\mathcal{H}_A : k_1 \to k_2, \quad \mathcal{H}_B : k_2 \to k_3, \quad \mathcal{H}_C : k_1 \to k_3.$$

Међутим, композиција прве две (в. задатак 4.3.4) је трећа хомотетија са центром C који лежи на правој AB и пресликава k_1 у k_3. □

Рјешење 4.3.18. i. Нека су K, L, M пресечне тачке линија AB и CD, AP и DQ, BP и CQ редом. Те тачке су центри хомотетија $\mathcal{H}_K$, $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_M$ са позитивним коефицијентима које пресликавају дужи BC у AD, AD у PQ и BC у PQ. Јасно је да $\mathcal{H}_L \circ \mathcal{H}_K = \mathcal{H}_M$. Према томе, тачке K, L, M су колинеарне.

ii. Нека су K, L, M пресечне тачке линија AB и CD, AQ и DP, BQ и CP редом. Те тачке су центри хомотетија $\mathcal{H}_K$, $\mathcal{H}_L$ и $\mathcal{H}_M$, од којих само прва има позитиван коефицијент а остале две негативне, које пресликавају дужи BC у AD, AD у QP и BC у QP. Јасно је да $\mathcal{H}_L \circ \mathcal{H}_K = \mathcal{H}_M$. Према томе, тачке K, L, M су колинеарне □

Рјешење 4.3.19. Зато што су унакрсни углови $\angle P_1AB$ и $\angle P_2AB$ једнаки, ротациона хомотетија око центра B преводи k_1 у k_2 и праву P_1Q_1 у праву P_2Q_2. □

Рјешење 4.3.20. Орјентисани углови над кружним луковима AP_1 и AP_2 су једнаки, па су једнакии углови између праве AB и правих P_1B односно P_2B. Према томе, тачке P_1, B и P_2 припадају једној правој. 

Фигуре

Рјешење 4.4.2. Основице трапеза су $AB = a$, $CD = b$, рецимо $a > b$, а темена A, B, C, D леже на кружници. Периферни углови над истим тетивама са исте стране су једнаки, а са разних страна тетиве су суплементни.

i. Конструишимо паралелу $CE \| DA$, $E \in AB$, тако да је $AECD$ паралелограм. Тада је $\angle BEC = 180° - \angle CEA = 180° - \angle ADC = \angle CBA$, то је троугао ΔBCE једнаккокрак и $BC = EC = AD$.

ii. Следи из подударности $\Delta ABC \cong \Delta BCD$.

iii. Из $AB + CD = BC + DA$ добијамо дужину крака $c = \frac{a+b}{2}$. Висина $h = CE$ је окомита на основицу AB. Тада је $EB = \frac{a-b}{2}$, па Питагорина теорема за троугао BCE даје редом:

$$CE^2 + EB^2 = BC^2,$$

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$h^2 = ab,$$

што је и требало доказати. □

Рјешење 4.4.3. Обим ℓ_1 малог троугла у темену A одсјеченог паралелом са BC, једнак је збиру удаљености из тачке A до тангентних тачака на кружници k. Исто за мале троуглове са теменима B и C добијамо обиме ℓ_2 и ℓ_3, тако да је $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = \ell$, тј. збир обима малих троуглова једнак је обиму великог троугла ABC. Из сличности тих троуглова следе пропорције $r_i : r = \ell_i : \ell$, за $i = 1, 2, 3$. Сабирањем ове три једнакости добијамо тражену. □

Рјешење 4.4.8. Налазимо MP, PN и њихов збир, редом:

$$MP = \frac{ab}{a+b}, \quad PN = \frac{ab}{a+b}, \quad MN = \frac{2ab}{a+b},$$

као у примјеру 4.4.1. □

Рјешење 4.4.9. Из сличности троуглова $\Delta ABC \sim \Delta CED$ следи $b : (b-p) = a : p$, а отуда $bp = ab - ap$, па $p = ab/(a+b)$, што је и требало показати. □

Рјешење 4.4.10. Из $\angle DAC = \angle ADC' = \angle DAB = \alpha/2$ следи подударност $\Delta ADB' \cong \Delta ADC'$, став USU, па је $B'D = C'D = p$. Како је четвороугао $AB'DC'$ паралелограм, он је ромб.

Полазећи од сличних троуглова, налазимо редом:

$$B'D : AB = CD : BC, \quad C'D : AC = BD : BC,$$

$$p : c = m : b, \quad p : b = n : a,$$

а отуда $m : n = b : c$, односно $DC : DB = AC : AB$. □

Рјешење 4.4.11. Пола збирне дужине $a+b$ је аритметичка средина $A(a,b)$.

Дужину $MN=a+b$, $MP=a$, $PN=b$ узмемо за пречкик кружнице k и повучемо нормалу $PQ\perp MN$, $Q\in k$. Троугао MNQ је правоугли (в. задатак 3.3.6) а висина PQ на хипотенузу MN има дужину $G(a,b)$.

Конструишемо (произвољан) троугао ABC са две дате странице $a=BC$ и $b=CA$. Повучемо симетралу CD угла $\angle C$. Конструишемо паралелу $DE\|AC$, $E\in BC$. Тада је $DE=H(a,b)$ (в. задатак 4.4.9). □

Рјешење 4.4.14. Нека је $ABCD$ произвољан конвексан четвороугао са срединама страница $M\in AB$, $N\in BC$, $P\in CD$, $Q\in DA$ и дијагоналом AC. Троугловима ABC и ADC су MN и PQ средње линије (дакле $MN\|AC\|PQ$ и $MN=\frac{1}{2}\cdot AC=PQ$), обе над истом страницом (дијагоналом), па су зато међусобно паралелне и једнаке дужине. Према томе је $MNPQ$ паралелограм, па је i. тачно.

Нека су E и F две тачке редом на дужима AC и MN, такве да $BE\perp AC$ и $BF\perp MN$. Тада је $E-F-B$, а због сличности $\Delta ABC\sim\Delta MBN$ биће и $BE=2\cdot BF$. Према томе је површина ΔABC четири пута већа од површине ΔMBN, пишемо $\mu(ABC)=4\mu(MBN)$. Слично добијамо још три једнакости:

$$\mu(BCD)=4\mu(NCP),\quad \mu(CDA)=4\mu(PDQ),\quad \mu(DAB)=4\mu(QAM).$$

Сабирајући све четири једнакости површина, налазимо:

$$2\mu(ABCD)=4\mu(MBN)+4\mu(NCP)+4\mu(PDQ)+4\mu(QAM),$$

$$\mu(ABCD)=2\mu(MNPQ),$$

гдје су са $\mu(ABCD)$ и $\mu(MNPQ)$ означене редом површине датог четвороугла $ABCD$ и паралелограма $MNPQ$, што значи да је ii. тачно.

Нека су $d_1=AC$ и $d_2=BD$ дужине дијагонала датог четвороугла. Обим паралелограма је, редом:

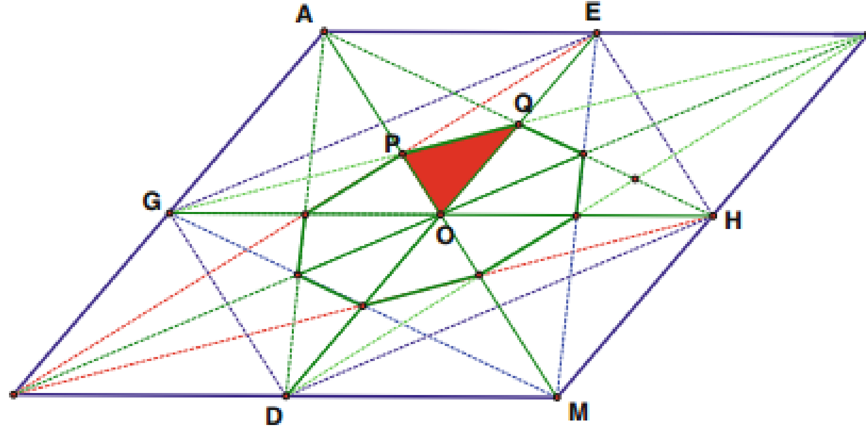
$$MN+NP+PQ+QM=\frac{1}{2}\cdot AC+\frac{1}{2}\cdot BD+\frac{1}{2}\cdot CA+\frac{1}{2}\cdot DB$$

$$=\frac{1}{2}d_1+\frac{1}{2}d_2+\frac{1}{2}d_1+\frac{1}{2}d_2=d_1+d_2.$$

Тиме је доказано iii. □

Рјешење 4.4.15. На датом паралелограму спојимо врхове се срединама супротних страница и у унутрашњости добијемо 8-угао као на слици 4.26. Затим спојимо средине супротних страница, E са D и G са H и , као на слици 6.45. Такође, спојимо супротна темена (овдје A са M). Све те спојнице имају заједничку тачку O.

Са слике видимо да се дати паралелограм састоји од осам малих троуглова, попут AOE. Како је P тежиште троугла DAE, то је $PO=\frac{1}{3}\cdot AO$ и $OQ=\frac{1}{2}\cdot OE$. Отуда је површина $\mu(POQ)=\frac{1}{6}\cdot\mu(AOE)$. Отуда, површина зеленог 8-угаоника је шестина површине датог паралелограма. □



Slika 6.45: Проблем Лидски, наставак.

Рјешење 4.4.17. На слици 6.46 се види да дужине страница уписаног косог (црвеног) квадрата и њему уписаног хоризонталног (црног) квадрата износе редом $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $a_2 = \frac{a}{2}$. Овај низ дужина након $n = 1, 2, 3, \dots$ корака може се писати у облику:

$$a_0 = a, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a, \quad a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a, \quad \dots, \; a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n a,$$

па је збир обима свих тих квадрата $\sigma_n = 4(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, односно:

$$\frac{\sigma_n}{4a} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = S_n,$$

гдје је $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Због $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$ биће збир обима почетног и првих $n \in \mathbb{N}$ уписаних квадрата

$$\sigma_n = 4a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Како је $q = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ степен броја q брзо тежи нули (рецимо $q^{20} < 0,001$), па га за веома велико n (нпр. $n > 20$) можемо занемарити. Зато процењујемо да је збир обима датог и тих бесконачно много уписаних квадрата

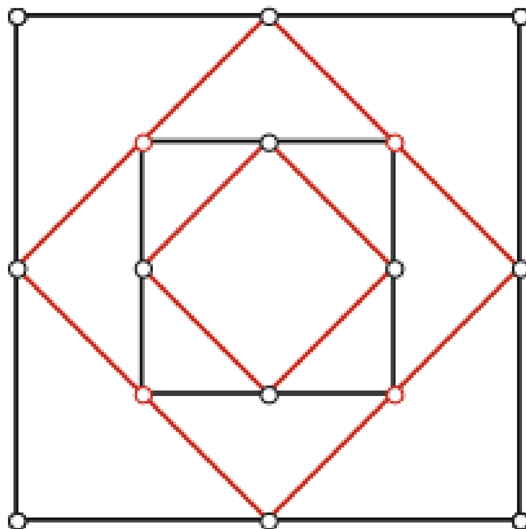
$$\sigma_\infty = \frac{4a}{1 - q} = \frac{8a}{2 - \sqrt{2}} = 4a(2 + \sqrt{2}),$$

или приближно $\sigma_\infty = 6,82843a$. □

Рјешење 4.4.18. Средње линије троуглова ACD и ACB су MM_1 иM_1N, па је $MN = MM_1 + M_1N = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$, а то је прва једнакост.

Нека је $a > b$. Из претходног и средње линије троугла BCD налазимо, редом:

$$MN = MM_1 + M_1N_1 + N_1N,$$



Slika 6.46: Низ уписаних квадрата.

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b}{2} + M_1N_1 + \frac{b}{2},$$
$$M_1N_1 = \frac{a-b}{2},$$

а то је друга тражена једнакост.

Из сличности $\Delta AOB \sim \Delta COD$ следи:

$$AB : DC = AO : OC = OD : OB = a : b,$$
$$\frac{AO}{AC} = \frac{a}{a+b}, \quad \frac{OB}{BD} = \frac{a}{a+b}.$$

Из сличности $\Delta AOP \sim \Delta ACD$ следи $AO : AC = OP : CD$, па због $CD = b$ добијамо $a : (a+b) = PO : b$, односно

$$PO = \frac{ab}{a+b}.$$

На исти начин налазимо $OQ = \frac{ab}{a+b}$, што сабирамо у

$$PQ = \frac{2ab}{a+b},$$

а то је трећа тражена једнакост. □

Рјешење 4.4.19. i. Дат је квадрат $ABCD$ јединичне странице $AB = 1$. Тачка $E \in AB$ на половини странице (доле) спојена је са теменом C квадрата десно горе. Дужина тог (дијагоналног) споја је

$$r = EC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

Пресек кружнице $k(E,r)$ и праве AB је тачка F. Та продужена страница износи

$$AF = AE + EF = \frac{1}{2} + r = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

тј. златни број Φ.

ii. Унутар датог полукруга конструише се произвољан квадрат $ABCD$ са страницом AB на пречнику и средином странице E у центру. Хомотетијом из E теме C се преслика у тачку G на кружници. Тада је $EF : FG = 1 : 2$, а $EF : EG = 1 : \sqrt{5}$. Према томе

$$GF : FH = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

а то је „златни однос”.

iii. На произвољну дуж $AB = a$ конструишемо нормалу $BC = a$. Средину нормале, тачку O бирамо за центар кружнице $k(O,r)$ полупречника $r = \frac{1}{2}$. Пресек праве AO и кружнице k је тачка D. Пресек кружнице $k_1(A,AD)$ и дате дужи AB је тачка E која дуж AB дијели у златном пресеку.

Наиме,

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$AD = AO - DO = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2},$$

па је $AE = AD = a\phi$. □

Рјешење 4.4.20. Темена правилног пентагона $ABCDE$ су једнако удаљена од централне тачке O, центра описане кружнице $k(O,r)$, из којег се странице дужине a види под централним углом $\angle AOB = 360°/5 = 72°$.

i. Периферни угао над тетивом AB је $\angle ADB = 72°/2 = 36°$. Над тетивама исте дужине a су периферни углови $\angle EDA = \angle ADB = \angle BDC$, па је унутрашњи угао $\angle EDC = 3 \times 36° = 108°$.

ii. Темена $A,B,C,E \in k$ па је четвороугао $ABCE$ тетиван. Како је $\angle A = \angle B = 108°$, то су му суплементни углови $\angle C = \angle E = 72°$, а $EC \| AB$.

iii. Из Птоломејеве једнакости (в. теорему 3.3.15) следи $d^2 = ad + a^2$. Ако ставимо да је дијагонала јединичне дужине, $d = 1$, онда је страница „златни” број $a = \phi$, јер решава једначину (4.13), односно задовољава пропорцију (4.12). □

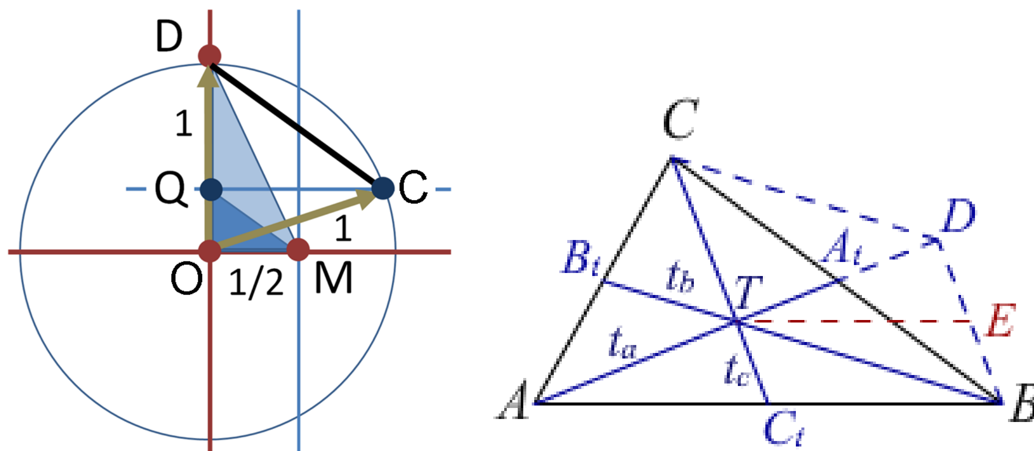
Рјешење 4.4.21. i. Дату дуж d поделимо у „златном пресеку” $d : a = a : (d-a)$. Конструишемо ΔABD, затим нађемо и темена C и E, са слике 4.30.

ii. Конструишемо „златни” део $a\phi$ странице a, па хомотетијом увећамо $a\phi \to a$, $a \to a\Phi = d$. Са страницом и дијагоналом конструишемо правилан пентагон на претходни начин.

iii. Према Ричмонду[26], конструишемо кружницу $k(O,r)$ датог полупречника, као на слици 6.47 лево. Затим, конструишемо правоугли троугао ΔMDO, са правим

[26]Herbert W Richmond (1893)

углом у центру O и катетама $OD = r$ и $OM = \frac{r}{2}$. Повучемо симетралу угла MQ, па паралелу $QC \| OM$, гдје је $C \in k$ а дуж $DC = a$ је страница пентагона. Затим наставимо према претходном. □



Slika 6.47: Конструкција пентагона у дати круг.

Упутство 4.4.22. Два угла троугла α и β дефинишу фамилију сличних троуглова, а нама треба онај са збиром страница $5a - 2b$. Када имамо произвољан троугао $A'B'C'$ сличан траженом, али са збиром $5a - 2b'$ конструишемо пропорцију

$$(5a' - 2b') : (5a - 2b) = a' : a,$$

помоћу Талесове теореме (в. слику 3.13). □

Рјешење 4.4.24. На слици 6.47 десно, $CD \| TB$, $BD \| TC$, па је четвороугао $BDCT$ паралелограм, чије се дијагонале полове у тачки A_t. Зато је BA_t тежишница ΔBDT. Како је дужина TC_t пола од CT она је и пола од DB. Према томе, тежишница TE троугла BDT је паралелна са AB и једнака њеној половини.

i. За конструкцију узмемо 2/3 сваке тежишнице и према ставу SSS подударности, конструишемо троугао BDT. Нађемо тежиште тог троугла, удвостручимо слику и добијемо три странице треженог троугла.

ii. Троугао $A_tB_tC_t$ је сличан ΔABC и двоструко је мањи. Удвостручимо му странице.

iii. Троугао CB_tC_t има странице $b/2$, $a/2$ и t_c, па се лако конструише. Затим се удвостручи AC_t и добије тачка B.

iv. Троугао BB_tC има странице t_b, $b/2$ и a. Конструишемо га и удвостручимо CB_t. □

Орјентисане дужи

Рјешење 5.1.2. На слици 6.48 лево, видимо трапез $ABCD$ са средњом линијом MN. Из векторских једнакости:

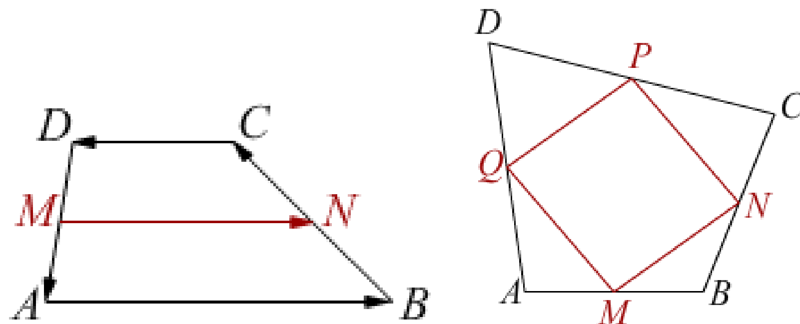
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

сабирањем добијамо $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, односно

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}.$$

А како је $AB \| CD$, то је оно што је и требало доказати. □



Slika 6.48: Трапез и произвољан четвороугао.

Рјешење 5.1.3. Нека су M, N, P, Q средине страница редом AB, BC, CD, DA четвороугла на слици 6.48 десно, при чему његова четири темена A, B, C, D не морају бити компланарна[27]. Све те тачке дефинишу крајеве неких вектора. Надовезивањем вектора страница налазимо векторе средњих линија:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, & \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}, \\ \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, & \overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \end{cases}$$

Сабирањем по два вектора средњих линија налазимо:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = 0, \\ \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = 0, \end{cases}$$

[27]компланарни - леже у истој равни

одакле:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}, \quad \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}.$$

То значи да су наспрамне странице четвороугла $MNPQ$ паралелне и једнаких дужина. □

Рјешење 5.1.4. Нека је $ABCD$ паралелограм са дијагоналама AC и BD које се секу у тачки O. Тада сабирањем једнакости $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$ добијамо

$$2 \cdot \overrightarrow{AO} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}).$$

Међутим, збир вектора у првој загради је дијагонала $\overrightarrow{AC}$ на којој лежи вектор $\overrightarrow{AO}$, а не лежи вектор из друге заграде. Према томе је:

$$2 \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD},$$

што значи да тачка O полови обе дијагонале. □

Рјешење 5.1.5. Наспрам темена троугла ABC нека су средине страница, тачке A_1, B_1 и C_1. Тада је:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \\ \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \end{array}\right\} +$$

па је

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0.$$

□

Рјешење 5.1.6. Из

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}, \\ \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}, \\ \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT}, \end{array}\right.$$

сабирањем следи

$$3 \cdot \overrightarrow{OT} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}).$$

Међутим, из претходног задатка следи да је израз у другој загради нула, па остаје тражени резултат. □

Рјешење 5.1.8. Посматрајмо троугао ABC гдје је $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$. Дужине прве две од ових страница су $a = |\vec{a}|$ и $b = |\vec{b}|$. Према теореми 3.2.16, симетрала угла $\angle C$ пада у тачку $D \in AB$ тако да је $AD : DB = b : a$. Отуда:

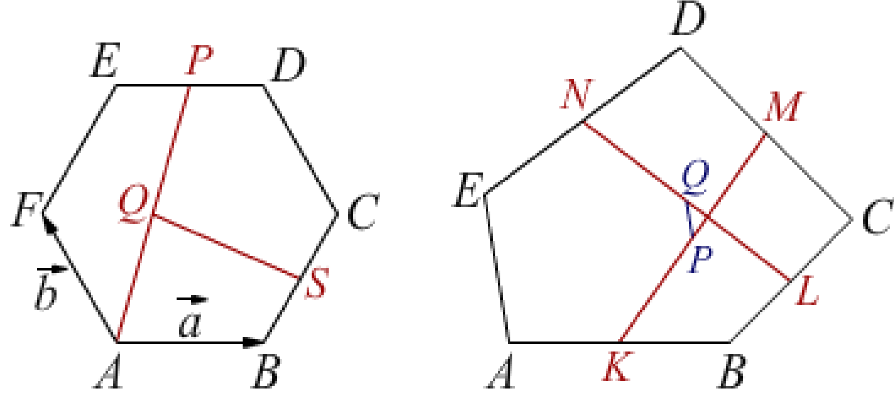
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \frac{b}{a+b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \frac{a\vec{b} + b\vec{a}}{a+b},$$

што је и требало показати. □

Рјешење 5.1.11. Дијагонале AD, BE и CF деле дати шестоугао на шест подударних, дакле једнакостраничних троуглова. Са слике 6.49 лево видимо:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}\\ \overrightarrow{QS}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}.\end{array}\right\}+$$

Након сабирања и сређивања добијамо $\overrightarrow{QS}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, што је тражени резултат. □



Slika 6.49: Правилан шестоугао и произвољан петоугао.

Рјешење 5.1.12. Вектор $\vec{r}_X=\overrightarrow{OX}$ из дате фиксне тачке O до тачке X назива се радијус вектор (тачке X у односу на исходиште O). На слици 6.49 десно видимо:

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}_Q-\vec{r}_P=\frac{1}{2}(\vec{r}_L+\vec{r}_N)-\frac{1}{2}(\vec{r}_K+\vec{r}_M)=$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{r}_B+\vec{r}_C)+\frac{1}{2}(\vec{r}_D+\vec{r}_E)]-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B)+\frac{1}{2}(\vec{r}_C+\vec{r}_D)]$$

$$=\frac{1}{4}(\vec{r}_E-\vec{r}_A)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE},$$

што је и требало доказати. □

Рјешење 5.1.13. Нека су P,Q,R,S средине дужи AF,CE,BF,DE редом. Са слике 6.50 лево видимо:

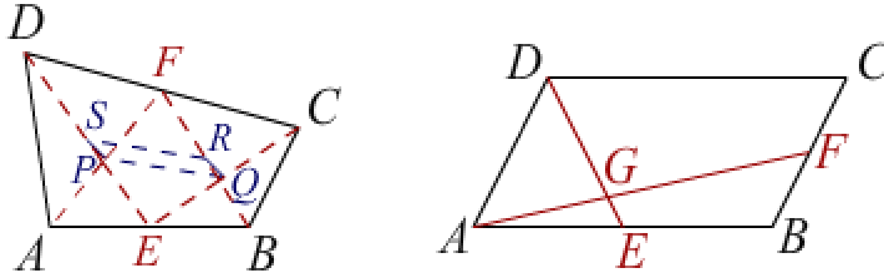
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ},$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CQ},$$

одакле сабирањем, сређивањем и делењем са два налазимо

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}).$$

Исто се добија и за $\overrightarrow{SR}$, па из $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ следи да је $PQRS$ паралелограм. □



Slika 6.50: Произвољан четвороугао и паралелограм.

Рјешење 5.1.14. Означимо $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, и користимо слику 6.50 десно. Тада је $\overrightarrow{AF} = \alpha \cdot \overrightarrow{AG}$ и $\overrightarrow{DE} = \beta \cdot \overrightarrow{DG}$. Важе $\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\overrightarrow{DE} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. Затим, имамо:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{b} + \frac{1}{\beta}\left(-\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \frac{1}{2\beta}\vec{a} + \frac{\beta - 1}{\beta}\vec{b}.$$

Отуда векторска једначина

$$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{\alpha}{2\beta}\vec{a} + \alpha \cdot \frac{\beta - 1}{\beta}\vec{b},$$

из које следи систем једначина:

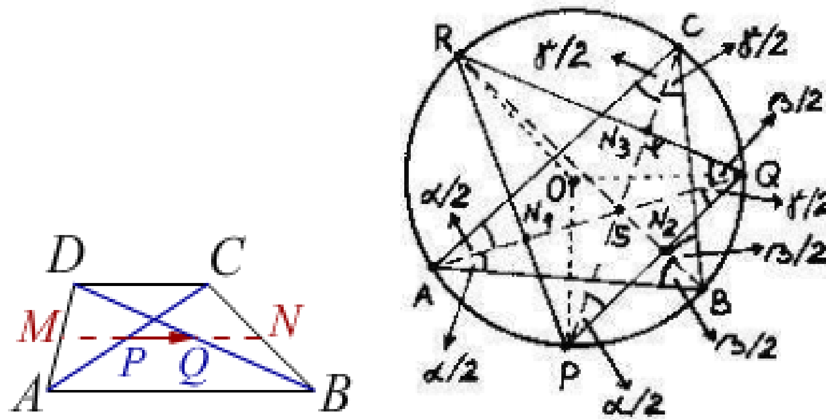
$$\frac{\alpha}{2\beta} = 1, \quad \alpha \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{1}{2}.$$

Рјешење овог система је $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{5}{4}$, одакле закључујемо да су тражени односи $AF : AG = 5 : 2$ и $DE : DG = 5 : 4$. □

Рјешење 5.1.15. Подаци су дати на на слици 6.51 лево. Тврђење добијамо сабирањем једнакости $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$ и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ}$ и дељењем са два. □

Рјешење 5.1.17. Користимо слику 6.51 десно. Прво имамо да су C, S, P колинеарне тачке (лукови $AP = PB$, периферни $\angle ACS = \angle SCB = \gamma/2$ и S - средиште уписане кружнице троугла ABC) и аналогно томе да су B, S, R, те A, S, Q колинеарне тачке. Затим је $\angle CPQ = \angle CAQ = \alpha/2$, $\angle PQA = \gamma/2$ и $\angle AQR = \beta/2$, па из ΔSQN_3 налазимо $\beta/2 + (\alpha/2 + \gamma/2) + \varphi = 180°$, тј. $\varphi = 90°$, односно $PN_3 \perp QR$. Аналогно добијамо $QN_1 \perp RP$ и $RN_2 \perp PQ$, паје S ортоцентар троугла PQR. Према претходном примјеру, тада је $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS}$. Отуда и из датог $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ следи $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS}$, што се и тврдило. □

Рјешење 5.1.18. На слици 6.52 лево је задати тетивни четвороугао $ABCD$ уписан у кружницу са средиштем у тачки O. Нормале из половишта M, N, P и Q страница



Slika 6.51: Трапез и уписани троугао.

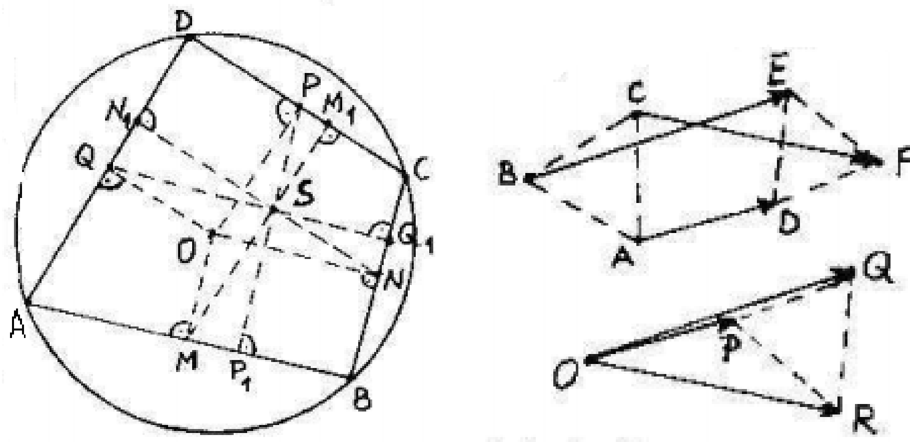
AB, BC, CD и DA редом на супротне странице четвороугла су MM_1, NN_1, PP_1 и QQ_1. Нека је $MM_1 \cap PP_1 = S$. Четвороугао $MSPO$ је паралелограм, па је:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Аналогно имамо за паралелограм NS_1QO, гдје је $S_1 = NN_1 \cap QQ_1$:

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Према томе $S = S_1$, односно све четири нормале се секу у једној тачки. □



Slika 6.52: Тетивни четвороугао и једнакостранични троуглови.

Рјешење 5.1.19. Користимо слику 6.52 десно.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AC}.$$

Како вектори $\overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{AC}$ настају ротацијом вектора $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{AB}$ око D и A за $-60°$, то је троугао PQR једнакостраничан. □

Рјешење 5.1.20. Користимо слику 6.53 лево. Према задатку 5.1.3 четвороугао $EFGH$ је паралелограм. Из

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}, \quad \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP},$$

добијамо:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP}).$$

Ротацијом вектора $\overrightarrow{EF}$ око тачке E за $90°$ добијамо вектор

$$\overrightarrow{E'F'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP}).$$

Са друге стране, из:

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ}, \quad \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ},$$

добијамо:

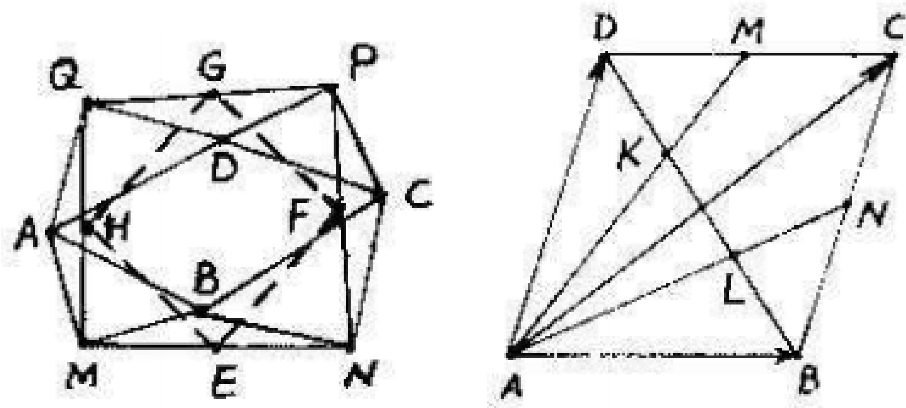
$$\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}),$$

а то је вектор $\overrightarrow{E'F'}$. Дакле $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{EH}$ и $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{EH}|$, што значи да је четвороугао $EFGH$ квадрат. □

Рјешење 5.1.21. Користимо слику 6.53 десно.

$$\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AK} = r\overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AL} = s\overrightarrow{AN},$$

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$



Slika 6.53: Четвороуглови.

затим $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD}$, па је

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = r\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{r}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{r}{2}[(p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}] - \overrightarrow{AD},$$

а отуда

$$(\frac{pr}{2} - \frac{1}{3})\overrightarrow{AB} + [(q+1)\frac{r}{2} - \frac{2}{3}]\overrightarrow{AD} = 0.$$

Због линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ биће $pr/2-1/3 = 0$ и $(q+1)r/2-1/3) = 0$, одакле је $q = 2p - 1$. Аналогно из $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{LB}$, тј. из $[(p+1)s/2 - 2/3]\overrightarrow{AB} + (qs/2 - 1/3)\overrightarrow{AD} = 0$ излази $p = 2q - 1$. Из обе једначине $p = 2q - 1$ и $q = 2p - 1$ излази $p = q = 1$, па је $r = s = 2/3$, а одатле $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, што значи да је $ABCD$ паралелограм. □

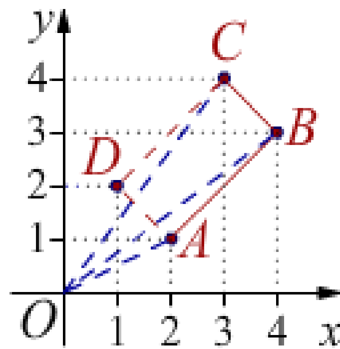
Координате

Рјешење 5.2.1. На слици 6.54 су дате тачке A, B, C и D. Оне су врхови вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$. Из $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,3) - (2,1) = (2,2)$ или $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (-2,-2)$ добијамо $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = (3,4) + (-2,-2) = (1,2)$. Према томе, четврто теме паралелограма је тачка $D(1,2)$. □

Рјешење 5.2.2. Темена паралелограма су $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(3,4)$ и $D(1,2)$, па су суседне странице $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ и $\overrightarrow{BC} = (-1,1)$, а дијагонале $\overrightarrow{AC} = (1,3)$ и $\overrightarrow{BD} = (-3,-1)$. Према формули (5.5), њихове дужине су:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{10}.$$

Паралелограм са једнаким дијагоналама је правоугаоник. □



Slika 6.54: Паралелограм координата.

Рјешење 5.2.4. То је паралелограм из претходног задатка.

i. За странице $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ и $\overrightarrow{BC} = (-1,1)$ имамо:

$$\cos\angle XAB = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\angle XBC = \frac{-1}{\sqrt{1+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

па је $\angle XAB = 45°$ и $\angle XBC = 135°$. Остале странице су паралелне овима.

ii. Према косинусној теореми, за ΔABC имамо:

$$\cos\angle A = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}} = \frac{10+8-2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}} = 0,89443$$

$$\cos\angle B = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}} = \frac{8+2-10}{2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos\angle C = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}} = \frac{10+2-8}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = 0,44721$$

па је $\angle A = 26,57°$, $\angle B = 90°$ и $\angle C = 63,43°$. Поменути четвороугао јесте правоугаоник, овдје са правим углом у темену B. □

Рјешење 5.2.6. Нужност. Претпоставимо да је скуп вектора V линеарно зависан. То значи да постоји њихова комбинација која исчезава на нетривијалан начин. Без смањења општости рецимо да је $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ и $\lambda_1 \ne 0$. Тада

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\vec{a}_n,$$

што значи да смо један представили линеарном комбинацијом осталих.

Довољност. Без смањења општости претпоставимо да је $\vec{a}_1 = \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n$. Отуда

$$1\cdot\vec{a}_1 + (-\alpha_2)\vec{a}_2 + \dots + (-\alpha_n)\vec{a}_n = \vec{0},$$

што значи да су дати вектори линеарно зависни. □

Рјешење 5.2.12. Како не постоји скалар α такав да је $\vec{e}_2 = \alpha\vec{e}_1$, то су ови вектори линеарно независни. Из $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ следи, редом:

$$9\vec{i} - 4\vec{j} = \lambda_1(3\vec{i} + \vec{j}) + \lambda_2(\vec{i} - 2\vec{j}),$$
$$= (3\lambda_1 + \lambda_2)\vec{i} + (\lambda_1 - 2\lambda_2)\vec{j},$$
$$9 = 3\lambda_1 + \lambda_2, \quad -4 = \lambda_1 - 2\lambda_2.$$

Множећи прву једначину са 2 и сабирајући их налазимо $\lambda_1 = 2$, а затим $\lambda_2 = 3$. Отуда $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. □

Рјешење 5.2.15. Из $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{p} - 2\vec{q})\cdot(\vec{p} - 2\vec{q})$ следи:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} - 2\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{q}\cdot\vec{p} + 4\vec{q}\cdot\vec{q}$$
$$= |\vec{p}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos 30^\circ - 2|\vec{q}||\vec{p}|\cos 30^\circ + 4|\vec{q}|^2 = 4,$$

јер је $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отуда $|\vec{a}| = 2$. □

Рјешење 5.2.16. Пре свега $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$ јер су ови вектори окомити. Према томе

$$5\lambda|\vec{m}|^2 + (10 - 4\lambda)\vec{m}\cdot\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0,$$

а због $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ биће $5\lambda + (10 - 4\lambda)\vec{m}\cdot\vec{n} - 8 = 0$, односно $\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{8-5\lambda}{10-4\lambda}$.

i. Из $\vec{m} \perp \vec{n}$ следи $\angle(\vec{m},\vec{n}) = 90^\circ$, односно $\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) = 0$, те $\lambda = \frac{8}{5}$.

ii. Из $\lambda = 1$ следи $\cos\angle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{8-5}{10-4} = \frac{1}{2}$, односно $\angle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$. □

Рјешење 5.2.17. Нека је дат троугао ABC са висинама $h_a = AD \perp BC$ и $h_c = CF \perp AB$ са пресечном тачком $H = AD \cap CF$. Ако дуж BE, $E \in AC$ садржи тачку H, треба доказати да је та дуж висина h_b троугла, тј. да је $BE \perp AC$.

Из $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$ следи $\overrightarrow{HC}\cdot(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$. Слично, из $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}$ следи $\overrightarrow{HA}\cdot(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$. Сабирањем ових једнакости добијамо $(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA})\cdot\overrightarrow{HB} = 0$, тј. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB} = 0$, односно $BE \perp AC$, што је и требало доказати. □

Рјешење 5.2.18. Ромб $ABCD$ разапињу два вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ једнаких интензитета. Дијагонале ромба су $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$. Треба доказати $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2 = 0$.

Наиме: $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2 = (\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$. Према томе је $\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2$, што је и требало доказати. □

Рјешење 5.2.19. Троугао ABC дефинише векторе $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ са интензитетима $c = |\vec{c}|$, $a = |\vec{a}|$ и $b = |\vec{b}|$. Угао у темену A је $\alpha = \angle(\vec{c},\vec{b})$.

из $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ следи $\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{b} - \vec{c})\cdot(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{c}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{c}$, односно

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

а то је прва од једнакости косинусне теореме. Слично доказујемо и остале две. □

Рјешење 5.2.25. Темена троугла ABC дефинишу векторе $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, тако да је $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Множењем са десна добијамо $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c} - \vec{c}\times\vec{c}$, па због $\vec{c}\times\vec{c} = 0$ добијамо $|\vec{a}\times\vec{c}| = |\vec{b}\times\vec{c}|$, а отуда $a\sin(180^\circ - \beta) = b\sin\alpha$, тј. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Слично налазимо и остале две пропорције. □

Једначине

Рјешење 5.3.1. Из $x+3x = 492$ добијамо први сабирак $x = 492/4 = 123$. Други сабирак је $3x = 369$. □

Рјешење 5.3.2. Брзина приближавања им је $v = 50 + 60 = 100$ km/h, на путу $s = 220$ km, па је време до сусрета $t = s/v = 2$ h. □

Рјешење 5.3.4. Аниној куповини одговара линеарна једначина $40x + 200y = 520$, а Бранковој $60x + 100y = 380$. Након скраћивања са 20 добијамо систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} 2x + 10y = 26, \\ 3x + 5y = 19. \end{cases}$$

Када прву једначину система помножимо са 5, а другу са −10 и саберемо их, добијамо $-20x = -60$, тј. $x = 3$ килограма. Када прву једначину множимо са 3 а другу са −2 и саберемо их, добијамо $20y = 40$, тј. $y = 2$ килограма. Дакле, Ана и Бранко су куповали по 3 односно 2 килограма редом јабука и крушака. □

Рјешење 5.3.6. Задатку одговара систем једначина:

$$\begin{cases} 5,20x + 1,67y = 5682, \\ 5,30x + 1,61y = 5736. \end{cases}$$

Детерминанте система и промењљивих су:

$$D = \begin{vmatrix} 5,20 & 1,67 \\ 5,30 & 1,61 \end{vmatrix} = 5,20 \cdot 1,61 - 5,30 \cdot 1,67 = -0,479$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5682 & 1,67 \\ 5736 & 1,61 \end{vmatrix} = 5682 \cdot 1,61 - 5736 \cdot 1,67 = -431,1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5,20 & 5682 \\ 5,30 & 5736 \end{vmatrix} = 5,20 \cdot 5682 - 5,30 \cdot 5736 = -287.4$$

па Крамеров систем једначина $D \cdot x = D_x$ и $D \cdot y = D_y$ даје:

$$x = 900, \quad y = 600.$$

Марко је трговао са 900, односно 600 акција. □

Рјешење 5.3.7. Задатку одговара систем једначина:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 9, \\ \frac{x}{6} + \frac{2y}{3} = 10. \end{cases}$$

Детерминанте система и промењљивих су:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & \frac{1}{3} \\ 10 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 9 \cdot \frac{2}{3} - 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 9 \\ \frac{1}{6} & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot 10 - \frac{1}{6} \cdot 9 = 1$$

па Крамеров метод даје решења:

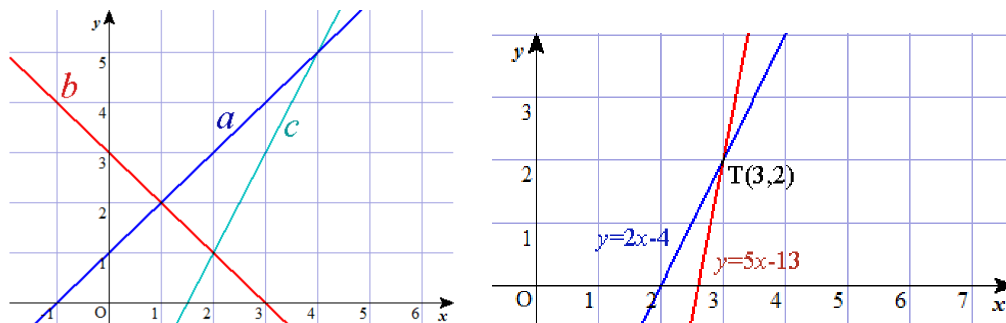
$$x = \frac{D_x}{D} = 24, \quad y = \frac{D_y}{D} = 9.$$

Просечна брзина реке у горњем току је 24, а у доњем 9 km/h. □

Рјешење 5.3.8. Нека су x и y запремине великих, односно малих посуда. Тада имамо једначине $5x + 3y = 13$ и $x - 3y = 1$ чије рјешење су $x = 2,5$ и $y = 0,5$ литара. □

Рјешење 5.3.9. Из система једначина: $x + y = 20$ и $3x + 11y = 100$, налазимо $x = 15$ и $y = 5$. Дакле, 15 питања је типа тачно-нетачно, а 5 са вишеструким избором. □

Рјешење 5.3.11. Праве a, b и c су на слици 6.55 лево. Њихови пресеци су тачке $(1,2) \in a \cap b$, $(4,5) \in a \cap c$ и $(2,1) \in b \cap c$. □



Slika 6.55: Три праве и две праве.

Рјешење 5.3.12. Узимајући за x редом 2, 3 и 4 израчунавамо y, за прву па за другу праву, а те тачке (x,y) цртамо у Декартовом правоуглом систему Oxy, као на графу 6.55 десно. Налазимо тачку $T(x,y)$ пресека тих правих и њене координате $x = 3$ и $y = 2$ проглашавамо за рјешење система. □

Рјешење 5.3.14. Праве су паралелне када су коефицијенти уз x једнаки, тј. када је $\lambda = 1$. Међутим, тада су једначине $x + y = 1$ и $x + y = 2$ у контрадикцији и нема решења. Када је $\lambda \neq 1$ тада имамо тачку пресека правих $T(\frac{1}{1-\lambda}, \frac{1-2\lambda}{1-\lambda})$. □

Рјешење 5.3.15. Детерминанта сва три система је заједничка:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Међутим, слободни чланови у првој, другој и трећој колони су различити, па имамо редом следеће детерминанте варијабли:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1, \quad 0, \quad 0;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1, \quad \lambda^2 - 1, \quad \lambda^3 - \lambda.$$

Према томе, када је $D \neq 0$, тј. $\lambda \neq \pm 1$, тада сваки од три система има своје јединствено рјешење $\xi = D_\xi / D$ за $\xi \in \{x, y\}$, редом:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda+1}, & 0, \quad 0; \\ y = \frac{1}{\lambda+1}, & 1, \quad \lambda. \end{cases}$$

Када је $D = 0$, тада немамо јединствена решења и имамо два случаја.

За $\lambda = 1$ сва три система се своде на $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot y = 0$ и на бесконачно решења која сва можемо описати са $x = 1 - t$ и $y = t$ везано за произвољан параметар t.

Када је $\lambda = -1$, имамо системе:

$$\begin{cases} -x + y = 1, & 1, \quad -1; \\ \;\; x - y = 1, & -1, \quad 1. \end{cases}$$

Први је у контрадикцији и нема решења, а други и трећи (друга и трећа колона иза једнакости) су $x - y = \mp 1$, са општим решењима $(t \mp 1, t)$. □

Рјешење 5.3.16. Уводимо смену: $\frac{1}{x+y} = u$ и $\frac{1}{x-y} = v$, за коју важи линеарни систем једначина: $21u + 6v = 5$, $49u - 27v = -2$, са рјешењем $u = \frac{1}{7}$, $v = \frac{1}{3}$. Враћамо смену и добијамо линеарни систем: $x + y = 7$, $x - y = 3$, са рјешењем $x = 5$, $y = 2$. □

Рјешење 5.3.17. Уводимо смену $u = \frac{1}{x+1}$, $v = y - 1$, која дати систем своди на:

$$\begin{cases} u + mv = 1, \\ mu + v = 2m. \end{cases}$$

Детерминанта овог система је:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2,$$

а детерминанте променљивих u и v:

$$D_u = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2m^2, \quad D_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2m \end{vmatrix} = m.$$

Када је $D \neq 0$ и $D_u \neq 0$, тј. $m^2 \neq 1$ и $m^2 \neq \frac{1}{2}$, односно $x \notin \{1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ тада имамо јединствено рјешење $u = \frac{D_u}{D}$, $v = \frac{D_v}{D}$, а отуда $x = -1 + \frac{D}{D_u}$, $y = 1 + \frac{D_v}{D}$.

Када је $D_u = 0$, тј. $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, тада због $u = 0$ не постоји одговарајуће $x = -1 + \frac{1}{u}$. Систем нема решења.

Када је $D = 0$, због $m^2 = 1$, биће $D_u = -1$, па је Крамерова једначина $D \cdot u = D_u$ контрадикција. Систем нема решења. □

Рјешење 5.3.18. Сменом $u = \frac{1}{2x-5}$, $v = x - 3y$ добијамо систем:

$$3u + v = -4, \quad \frac{5}{2}u - 2v = -\frac{1}{2},$$

чије је рјешење $u = v = -1$, а отуда $x = 2$, $y = 1$. □

Рјешење 5.3.19. За $x = 3a$ или $x = b$ једначина нема смисла. Такође, за $a = 0$ једначина је немогућа јер јој је лева страна 0, а десна није.

За $x \ne 3a$, $x \ne b$, $a \ne 0$, добијамо $a(b-x) = 2(3a-x)$, те $(a-2)x = a(b-6)$, па за $a \ne 2$ имамо $x = \frac{a(b-6)}{a-2}$. □

Рјешење 5.3.21. Одузмемо ли од сваког сабирка 1, добићемо:

$$\frac{x-2000}{1990} + \frac{x-2000}{1989} + \dots + \frac{x-2000}{1985} = \frac{x-2000}{10} + \frac{x-2000}{11} + \dots + \frac{x-2000}{15},$$

$$(x-2000)\left(\frac{1}{1990} + \dots + \frac{1}{1985} - \frac{1}{10} - \dots - \frac{1}{15}\right) = 0,$$

$$x - 2000 = 0.$$

Дакле, рјешење је јединствено $x = 2000$. □

Рјешење 5.3.22. Сменом $u = \frac{x+y}{xy}$, $v = \frac{x-y}{xy}$ систем постаје:

$$u + \frac{1}{u} = a + \frac{1}{a}, \quad v + \frac{1}{v} = b + \frac{1}{b},$$

чија су решења $u \in \{a, \frac{1}{a}\}$, $v \in \{b, \frac{1}{b}\}$. Враћањем смене добијамо $x = \frac{2}{u+v}$ и $y = \frac{2}{u-v}$. □

Рјешење 5.3.23. Изрази у апсолутним заградама мењају знак за $x = 3$ и $x = 0$. Зато одвојено разматрамо три интервала.

За $x \in (-\infty, 0)$ дата једначина постаје $(3-x)+1 = -x-2x$, а отуда $x = -2 \in (-\infty, 0)$.

За $x \in [0, 3)$ једначина је $(3-x)+1 = x-2x$, тј. $4 = 0$. Нема решења.

За $x \in [3, +\infty)$ имамо $-(3-x)+1 = x-2x$, а отуда $x = 1 \notin [3, +\infty)$. Нема решења.
Једино рјешење дате једначине је $x = -2$. □

Рјешење 5.3.24. Изрази у апсолутним заградама мењају знак у тачкама $x = -4$, $x = \frac{3}{2}$ и $x = 2$. Решења тражимо по интервалима.

За $x \in (-\infty, -4)$, једначина постаје $x = -\frac{1}{3}$. Нема решења.

За $x \in (-4, \frac{3}{2})$, једначина постаје $x = \frac{3}{2} \notin (-4, \frac{3}{2})$.

За $x \in [\frac{3}{2}, 2)$, једначина постаје $0x = 0$. Рјешење је свако x из интервала.

За $x \in [2, \infty)$, једначина постаје $x = 2 \in [2, \infty)$.
Решења су $x \in [\frac{3}{2}, 2]$. □

Рјешење 5.3.25. Из дате једначине следи $|x-1| - 1 = \pm 2$, па $|x-1| = 1 \pm 2$, затим $x - 1 = \pm(1 \pm 2)$ и $x = 1 \pm (1 \pm 2)$. Од свих тих, решења су само $x = -2$ и $x = 4$. □

5.3.26. Раздвајамо раван Oxy на области у којима се знак у датим апсолутним заградама не мења.

За $x \geq 0$, $y \geq 0$, систем постаје: $x - y = \pm 2$, $x + y = 4$, са решењима[28] $(3,1)$ и $(1,3)$.

За $x \leq 0 \leq y$, систем постаје: $-x + y = 2$, $-x + y = 4$, што је контрадикција. Ова област нема решења.

За $x \leq 0$, $y \leq 0$, систем постаје: $x - y = \pm 2$, $x + y = -4$, са решењима $(-3,-1)$ и $(-1,-3)$.

За $y \leq 0 \leq x$, систем постаје: $x - y = 2$, $x - y = 4$, што је контрадикција. Нема решења.

Сва решења су: $(-3,-1)$, $(-1,-3)$, $(1,3)$ и $(3,1)$. □

Неједначине

Рјешење 5.4.1. Из неједначина $32 \leq v \leq 64$ следи:

$$32 \leq 80 - 32t \leq 64,$$

$$32 - 80 \leq -32t \leq 64 - 80,$$

$$16 \leq 32t \leq 48,$$

$$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}.$$

Дакле, након $0,5$ па све до $1,5$ секунди. □

Рјешење 5.4.2. Из каматног рачуна знамо да је $I = Kpt$, гдје је I интерес (добит од камате), K капитал (почетно уложени новац), p каматни проценат (годишње), t број година. Ако је x део капитала уложен у посао са очекиваних 7% камате, тада је $30\,000 - x$ остало за стабилних 5% камате. Укупна камата (годишње) ће бити

$$0,07x + 0,05(30\,000 - x = 0,02x + 1\,500.$$

Потребно је да тај приход буде већи од $1\,900$ евра годишње, па је:

$$0,02x + 1\,500 \geq 1\,900,$$

$$0,02x \geq 400,$$

$$x \geq 20\,000.$$

Дакле, уложићу бар $20\,000$ евра у посао са 7% камате, а остатак од почетних $30\,000$ евра ћу ставити на стабилних 5% камате. □

Рјешење 5.4.3. Задатак је сличан „рачуну смеше”, осим што се користе неједнакости. Поступак рада је приказан у табели:

[28] Редом апсциса и ордината, тј. (x,y).

	% Cu	kg	% · kg Cu
60%	0,6	x	$0,6 \cdot x$
40%	0,4	$30 - x$	$0,4 \cdot (30 - x)$
збир	од 0,4 до 0,5	тачно 30	од $30 \cdot 0,46$ до $30 \cdot\ 0,5$

Израчунавамо, редом:

$$30 \cdot 0,46 \le 0,6 \cdot x + 0,4 \cdot (30 - x) \le 30 \cdot 0,5,$$

$$13,8 \le 0,2x + 12 \le 15,$$

$$1,8 \le 0,2x \le 3,$$

$$9 \le x \le 15.$$

Треба узети од 9 до 15 kg 60% смеше. □

Рјешење 5.4.9. Бројник растављамо на факторе

$$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x} \ge 0.$$

Налазимо да су промене знака за $x \in \{-2, 1, 3\}$, па правимо таблицу:

x	$\infty < x < -2$	-2	$-2 < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < \infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f_1	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$

Скуп решења $f_1 \ge 0$ је $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$.

Слично, слика 6.56, налазимо за $f_2(x)$:

	-∞ … -3	-3 … -1	-1 … 2	2 … ∞
x+3	-	0 +	+	+
x+1	-	-	0 +	+
x-2	-	-	-	0 +
f_2	-	+	-	+

Slika 6.56: Табела функције $f_2(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x-2}$.

Решења за $f_2(x) \ge 0$ су $x \in (-3, -1) \cup (2, \infty)$. □

Рјешење 5.4.11. Све сабирке пребацујемо на леву страну неједнакости па растављамо на факторе.

i. Из $\frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)(x+1)} < 0$ следи $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$.

ii. Из $\frac{x(x-3)^2}{(1-x)(x-5)(x+5)} > 0$ следи $x \in (-5,0) \cup (1,3) \cup (3,5)$.

iii. Из $\frac{(1-x)[(x+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}]}{(x-3)(x^2+1)} < 0$ следи $x \in (-\infty,1] \cup (3,\infty)$. □

Рјешење 5.4.12. $ax + by - (ay + bx) = a(x - y) - b(x - y) = (a - b)(x - y) \ge 0$. □

Рјешење 5.4.13. Не смета доказу ако претпоставимо $a \ge b \ge c \ge 0$. Користећи смену $a^3 = x$, $b^3 = y$, $c^3 = z$ и претходни задатак три пута, налазимо:

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^2y + z^2z \ge x^3 + y^2z + z^2y \ge x^2z + y^2z + xyz \ge 3xyz.$$

Враћањем смене добијамо тражено тврђење. □

Рјешење 5.4.14. Смена $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ и претходни задатак. □

Рјешење 5.4.16. Странице троугла ABC су стандардно a,b и c. Из A_2G_2 неједнакости следи $(s - b) + (s - c) \ge 2\sqrt{(s - b)(s - c)}$ гдје је $s = \frac{a+b+c}{2}$ полуобим троугла. Међутим, $(s - b) + (s - c) = a$. Слично добијамо и остале две од неједнакости:

$$a \ge 2\sqrt{(s-b)(s-c)}, \quad b \ge 2\sqrt{(s-a)(s-c)}, \quad c \ge 2\sqrt{(s-a)(s-b)}.$$

Множећи их налазимо $abc \ge 8(s - a)(s - b)(s - c)$. Према задатку 3.4.39 је површина троугла $\mu = \frac{abc}{4R}$, па овдје имамо $4R\mu \ge 8(s-a)(s-b)(s-c)$. Према истом задатку, због Херонове формуле је $4R\mu \ge 8\frac{\mu^2}{s}$, а због $\mu = rs$ добијамо $4R\mu \ge 8r\mu$. Отуда $R \ge 2r$, што је и требало доказати. □

Рјешење 5.4.17. Из доказа претходног задатка узмимо $c \ge 2\sqrt{(s - a)(s - b)}$, добијено неједнакошћу A_2G_2. Поред тога, приметимо да је $c = 2R\sin\gamma$, па имамо

$$2R\sin\gamma \ge 2\sqrt{(s-a)(s-b)},$$

односно $2R\sin\gamma\sqrt{s(s-c)} \ge 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = ab\sin\gamma$, те $2R\sqrt{s(s-c)} \ge ab$. Из A_2G_2 неједнакости следи $\frac{s+(s-c)}{2} \ge \sqrt{s(s-c)}$, па сада имамо $\frac{s+(s-c)}{2} \ge \frac{ab}{2R}$, или $R(2s-c) \ge ab$, затим $R(a+b) \ge ab$, па $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{1}{R}$. Слично налазимо $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{1}{R}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \ge \frac{1}{R}$. Збир све три даје $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \ge \frac{3}{R}$, што делењем са 2 даје тражену неједнакост. □

Доказ 5.4.18. Нека су у Декартовом правоуглом систему дати вектори $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ и $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ са углом ϕ. Њихов скаларни производ је:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi \le ab = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Са друге стране, важи $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, па претходна неједнакост након квадрирања постаје тражена. Неједнакост постаје једнакост акко $\cos\phi = 1$, тј. када је $\phi = 0$. □

Доказ 5.4.19. Последица неједнакости троугла. Када вектори $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ и $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ дефинишу $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, трећу страницу троугла, биће $|\vec{c}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$, а то је тражена неједнакост. Неједнакост постаје једнакост акко $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. □

Рјешење 5.4.20. За $n = 1$, важи неједнакост са једнакошћу. За $n = 2$ је

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \ge 1 + 2x,$$

опет тачно. За $n = 3$ користимо претходни случај:

$$(1+x)^3 = (1+x)(1+x)^2 \ge (1+x)(1+2x) = 1 + 3x + 2x^2 \ge 1 + 3x.$$

Опет претходни, користимо за случај $n = 4$:

$$(1+x)^4 = (1+x)(1+x)^3 \ge (1+x)(1+3x) = 1 + 4x + 3x^2 \ge 1 + 4x.$$

И тако даље. Очигледно је да се ова процедура наставља без ограничења. □

Рјешење 5.4.21. i. Следи из $Z_n - xZ_n = (1 + x + \dots + x^n) - (x + x^2 + \dots + x^{n+11}) = 1 - x^{n+1}$.

ii. Према Бернулијевој неједнакости имамо $(1+q)^n \ge 1 + nq$, па је

$$0 < x^n = \frac{1}{(1+q)^n} \le \frac{1}{1+nq}.$$

За случај $-1 < x < 0$ добијамо слично, заменом x са $-x$. Случај $x = 0$ је тривијалан. Дакле увек, за $|x| < 1$ и неограничено велико n, број x^n постаје неограничено мали, тј. нула.

iii. Зато што разлика $Z_\infty - Z_n \to 0$ (тежи нули), када $n \to \infty$ (тежи бесконачности).

iv. Нека је $x = 0,6111\dots$ па је $10x = 6 + (0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + \dots)$, односно:

$$10x = 5 + (1 + 0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + \dots) = 5 + \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{55}{9},$$

а отуда $x = \frac{11}{18}$. □

Рјешење 5.4.22. i. Са једне стране је $1 \le n^{1/n}$. Са друге стране, стављајући $x = 1/\sqrt{n}$ у Бернулијеву неједнакост, добијамо $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \ge 1 + \sqrt{n} > \sqrt{n}$, а отуда $1 + \frac{1}{\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^{1/n}$, тј. $n^{1/n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 1$.

ii. Нека је дат низ $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, за $n = 1, 2, 3, \dots$. Сређујемо:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1},$$

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \ge \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

$$f_{n+1} \ge f_n,$$

што значи да је низ f_n растући (Неједнакост је Бернулијева). Отуда:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \le (1+1)^2 = 4,$$

тј. за свако $n \in \mathbb{N}$ је $f_n \le 4$, па кажемо да је тај низ ограничен одозго. Растући и овако ограничен низ постаје све тачније једнак неком броју, са порастом n, а затим можемо израчунавати да је тај број управо Ојлеров број $e \approx 2,71828$. □

Делење

Рјешење 6.1.2. i. Тражено делење $p : q$ је приказано на слици 6.1.2. Резултат је $s = x^2 - x$ са остатком $r = -x + 3$. Лако проверавамо да је заиста тачно $p = qs + r$.

ii. Слично налазимо количник $s = x^2 + x + 2$ и остатак $r = x - 5$. □

$$x^4 - 2x + 3 : (x^2 + x + 1) = x^2 - x$$
$$-(x^4 + x^3 + x^2)$$
$$-x^3 - x^2 - 2x + 3$$
$$-(-x^3 - x^2 - x)$$
$$-x + 3$$

Slika 6.57: Количник полинома је $x^2 - x$ са остатком $-x + 3$.

Рјешење 6.1.4. Слично претходном: i. $\text{NZD}(p, q) = 2x - 3$, ii. $\text{NZD}(p, q) = 2x + 3$. □

Рјешење 6.1.6. i. Према Безуовом ставу, ако је $p(x)$ дељиво са $x - 1$, тада је $p(1) = 0$. Из $p(1) = 1 + \lambda - 2 + 3 - 4 = 0$ следи $\lambda = 2$, затим $p : q = x^3 + 3x^2 + x + 4$.

ii. Ако је полином $p(x)$ дељив са $3x + 2$ он је дељив и са $x + \frac{2}{3}$. Из $p(-\frac{2}{3}) = 0$ следи $\lambda = \frac{13}{6}$. Затим налазимо $p : q = (2x + 3)/6$. □

Рјешење 6.1.7. i. Из $p(-1) = 0$ и $p(2) = 0$ следи $\alpha - \beta = -1$ и $2\alpha + \beta = -20$, а отуда $\alpha = -7$ и $\beta = -6$. Полином $p(x)$ делимо са $q_1 q_2$ и добијамо $x^2 + 2x + 3$.

ii. Слично, налазимо $\alpha = -5$ и $\beta = -6$, а затим $(p : q_1) : q_2 = x^2 + 1$. □

Рјешење 6.1.9. Из услова $p(1) = 10$ и $p(-1) = 4$ добијамо $a + b = 7$ и $a - b = -1$, па је $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = -7$. □

Рјешење 6.1.10. Из датих услова $p(-1) = p(1) = p(-4) = 4$ налазимо, редом:

$$\begin{cases} 2a + b + 4 = r, \\ 2a - b + 6 = r, \\ 32a + 4b - 59 = r, \end{cases} \qquad \begin{cases} 30a + 3b = 63, \\ 30a + 5b = 65, \end{cases}$$

одакле $a = 2$ и $b = 1$. □

Рјешење 6.1.11. Задатак се може решавати на два начина.

i. Први начин, Безуов став. Како је $q(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, а важи (6.2), то је $p(1) = r(1)$ и $p(-2) = r(-2)$, односно $a + b = 3$ и $4a + b = 6$. Отуда $a = 1$, $b = 2$.

ii. Други начин, изједначавање коефицијената. У идентитету

$$(\forall x)\ p(x) = q(x)s(x) + r(x),$$

количник мора бити облика $s(x) = mx + n$. Отуда:

$$(\forall x)\ x^3 + 2x^2 + ax + b = (x^2 - x - 2)(mx + n) + (7x + 7),$$

$$(\forall x)\ x^3+2x^2+ax+b = mx^3+(n-m)x^2+(7-n-2m)x+(7-2n),$$

$$1=m,\quad 2=n-m,\quad a=7-n-2m,\quad b=7-2n,$$

$$m=1,\quad n=3,\quad a=2,\quad b=1.$$

Дакле, налазимо $a=2$, $b=1$, али и количник $s(x)=x+3$. □

Рјешење 6.1.12. i. То је услов да идентички $(\forall x\in\mathbb{R})$ важи једнакост

$$x^3+px+1=(\alpha x+\beta)(x^2+mx-1),$$

за неке (непознате) константе α и β. Након множења и сређивања на десној страни, добијамо

$$(\forall x)\ x^3+px+1=\alpha x^3+(\alpha m+\beta)x^2+(-\alpha+\beta m)x-\beta.$$

Упоређивањем коефицијената:

$$1=\alpha,\quad 0=\alpha m+\beta,\quad p=-\alpha+\beta m,\quad 1=-\beta,$$

налазимо $\alpha=1$ и $\beta=-q$, као и тражени услов: $m=q$ и $p=1-q^2$, при чему је параметар q произвољан. Количник је $x-q$.

ii. Слично, добијамо $p=1-q^2$, $m=-q$ за произвољно q. Количник је $x+q$. □

Рјешење 6.1.13. i. Делењем $p(x)$ са $q(x)$ добијамо количник $s(x)=6x^2-x+(a-6b-1)$ и остатак $r(x)=(a-5b+2)x+2-b(a-6b-1)$. Због дељивости, остатак мора бити идентички једнак нули (нула-полином), па изједначавањем коефицијената добијамо систем једначина: $a-5b+2=0$, $2-b(a-6b-1)=0$. Када прву $a-5b=-2$ уврстимо у другу: $2-b(-2-b-1)=0$. Отуда $b^2+3b+2=0$, односно $(b+1)(b+2)=0$, што значи да имамо два решења $b=-1$ са $a=-7$ и $b=-2$ са $a=-12$.

ii. Дељењем добијамо $s(x)=7x^2-x+(a-7b+1)$, $r(x)=(a-6b-2)x+3+b(a-7b+1)$. Како је $r(x)\equiv 0$, биће $a-6b-2=0$ и $3+b(a-7b+1)=0$. Прву $a-6b=2$ уврстимо у другу, добијамо $3+b(2-b+1)=0$, односно $b^2-3b=3$, затим $4b^2-12b=12$, па $4b^2-12b+9=21$, те $2b-3=\pm\sqrt{21}$. Имамо два решења, $a_{1,2}=2+6b$ за $b_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$. □

Рјешење 6.1.14. Према Безуовом ставу, остатак делења $p(x)$ са $x+1$ је $p(-1)=-6$, а остатак при делењу са $x-3$ је $p(3)=6$.

Нека је $s(x)$ количник при делењу полинома $p(x)$ са $(x+1)(x-3)$, а $r(x)=ax+b$ остатак. Тада је

$$x^{2009}-3x^{2008}+x^{1009}-3x^{1008}+x+3=(x+1)(x-3)s(x)+ax+b.$$

Када у овој једначини ставимо $x=-1$, затим $x=3$, добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} -a+b=-6,\\ 3a+b=6,\end{cases}$$

чије је рјешење $a=3$, $b=-3$. Према томе, остатак делења $p(x)$ са $(x+1)(x-3)$ је $r(x)=3x-3$. □

Рјешење 6.1.15. Нека је $r(x) = ax + b$ остатак делења $p(x)$ са $(x-2)(x-3)$. Тада је

$$p(x) = (x-2)(x-3)s(x) + ax + b,$$

гдје је $s(x)$ полином степена за 2 мањег од степена полинома $p(x)$. Према Безуовом ставу је $p(3) = 4$ и $p(2) = 2$. Како је $p(3) = 3a + b$ и $p(2) = 2a + b$, имамо систем једначина чије рјешење лако налазимо: $a = 2$, $b = -2$. Према томе, тражени остатак је $r(x) = 2x - 2$. □

Рјешење 6.1.16. Полазећи од Безуовог става имамо редом:

$$p(1) = 10, \quad p(-1) = 4, \quad p(-2) = -8, \quad p(0) = 2,$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 10, \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 &= 4, \\ -8a_0 + 4a_1 - 2a_2 + a_3 &= -8, \\ a_3 &= 2. \end{cases}$$

Увстимо $a_3 = 2$ у прве три једначине. Сабирањем прве и друге налазимо $a_1 = 5$. Добијамо систем:

$$\begin{cases} a_0 + a_2 &= 3, \\ 4a_0 + a_2 &= 15, \end{cases}$$

одакле налазимо $a_0 = 4$ и $a_2 = -1$. □

Рјешење 6.1.17. Полином $p(x) - 10x$ исчезава у тачкама $x = 1, 2$ и 3, односно дељив је полиномом $(x-1)(x-2)(x-3)$. Како $p(x)$ нормиран полином четвртог степена, то је $p(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3(x-c)$ за неки број c. Отуда:

$$p(12) + p(-8) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 - c) + 120 + (-9)(-10)(-11)(-8 - c) - 80 = 19\,840.$$

□

Рјешење 6.1.18. Користимо формуле (6.3).

i. Из $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ и $c = 1$ следи $s_0 = 1$, $s_1 = a_1 + cs_0 = 1 + 1 \cdot 1 = 2$, $s_2 = a_2 + cs_1 = 3$, $r = a_3 + cs_2 = 4$. Према томе, количник је $s(x) = x^2 + 2x + 3$, а остатак је $r = 4$, па формула (6.2) гласи $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x + 3)(x-1) + 4$, што је лако проверити непосредним множењем.

ii. Из $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -3$, $a_4 = 5$, $a_5 = -4$ и $c = 2$ добијамо $s_0 = a_0 = 2$, $s_1 = a_1 + cs_0 = 0 + 2 \cdot 2 = 4$, $s_2 = a_2 + cs_1 = 8$, $s_3 = 13$, $s_4 = 31$ и $r = 58$. □

Рјешење 6.1.19. i. Дато је $c = 1$ и $a_0 = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -4$, $a_4 = 1$. Попуњавамо табелу:

	2	−1	3	−4	1
1	2	1	4	0	1

Отуда $p(x) = (2x^3 + x^2 + 4x)(x-1) + 1$.

ii. Резултат је $p(x) = (3x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 31x^2 + 62x - 128)(x+2) + 255$. □

Рјешење 6.1.21. i. Из $p_1(x) = x^4 - 2\cdot 12^2\cdot x^2 + 12^2 - 5^2 = (x^2-12^2)^2 - 5^2$ следи:

$$p_1(x) = (x^2-12^2-5^2)(x^2+12^2-5^2),$$

$$p_1(x) = (x-13)(x+13)(x^2+119).$$

Полином p_1 има две реалне $x_{1,2} = \pm 13$ и две имагинарне $x_{3,4} = \pm i\sqrt{119}$ нуле.

ii. Из $p_2(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2-1)^2 - x^2 = [(x^2-1)-x][(x^2-1)+x]$ следи:

$$p_2 = [(x^2-x)-1][(x^2+x)-1],$$

$$p_2 = \left[\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}\right]\left[\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}\right],$$

$$p_2 = \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right],$$

$$p_2 = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Отуда четири реалне нуле $x_{1,2,3,4} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Нуле p_2 су златни бројеви. □

Рјешење 6.1.22. i. $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$

$$= x^2(x^3-1) + (x^2+x+1)$$

$$= x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1),$$

$$x^5 + x + 1 = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

ii. $x^3 + x^2 + 4 = (x^3+8) + (x^2-4)$

$$= (x+2)(x^2-2x+2) + (x-2)(x+2),$$

$$x^3 + x^2 + 4 = (x+2)(x^2-x+2)$$

. □

Нултачке

Рјешење 6.2.7. Прво приметимо да је:

$$(x+y+z)^3 = (x+y+z)(x+y+z)^2$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xy+2yz)$$

$$= x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3y^2(x+z)+3z^2(x+y)+6xyz.$$

Затим израчунајмо: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 =$

$$= 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz)$$

$$= 3[z(x^2 + 2xy + y^2) + xy(x + y) + z^2(x + y)]$$
$$= 3(x + y)(xz + yz + xy + z^2)$$
$$3(x + y)[x(z + y) + z(y + z)]$$
$$= 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

□

Рјешење 6.2.11. Делењем $p(x) : (x - 1)$ лако налазимо количник $s(x) = 8x^3 + 27$ без остатка $r = 0$. Растављамо збир кубова $s(x) = (2x+3)(4x^2-6x+9)$. Тражени резултат је $p(x) = (x - 1)s(x) = (x - 1)(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$.

Трином $4x^2-6x+9 = (2x^2-6x+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}+9 = (2x-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}$ није растављив у реалном домену, али јесте у комплексном: $4x^2 - 6x + 9 = \frac{1}{4}(4x - 3 + 3i\sqrt{3})(4x - 3 - 3i\sqrt{3})$. □

Рјешење 6.2.12. i. Означимо $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Кубирањем налазимо:

$$x^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})^2(1 - \sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})^2} + 2 - \sqrt{5}$$
$$= 4 - 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 4 - 3x.$$

Једначина $x^3 + 3x - 4 = 0$ има рјешење $x_1 = 1$, па налазимо $(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0$. Трином $x^2 + x + 4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$ нема фактора у реалном домену. вриједност датог израза је 1.

ii. Ставимо $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$, па нађимо $x^3 = 14 - 3x$, тј. $p(x) = x^3 + 3x - 14$. Имајући у виду Безуов став, тражимо цео број $x \in \mathbb{Z}$ такав да је $p(x) = 0$ и налазимо $x = 2$. Према томе, полином $p(x)$ је дељив са $x - 2$. Дељењем добијамо количник $x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6$ који се даље не може растављати на факторе у реалном домену. вриједност датог израза је 2. □

Рјешење 6.2.13. i. Ставимо $p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ и тестирајмо неке $x = 0, \pm1, \pm2, \dots$ тражећи рјешење једначине $p(x) = 0$. Налазимо $p(-1) = 0$. Делећи $p(x)$ са $x + 1$ добијамо количник x^2-2x-3 (без остатка), који затим лако растављамо на факторе: $p(x) = (x+1)^2(x-3)$. Двострука нула датог полинома је $x = -1$, а трећа нула је $x = 3$.

ii. За $p(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$ налазимо $p(2) = 0$ и $p(-3) = 0$. Према томе, полином $p(x)$ је дељив са $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$. Количник је $x^2 - 2$. Отуда

$$p(x) = (x - 2)(x + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

а једначина има четири реална решења: 2, −3, $\pm\sqrt{2}$. □

Рјешење 6.2.14. Када је полином $p(z)$ реалан, тада су му оба z_1 и $\bar{z}_1$ нултачке, па је дати полином дељив са $q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1$.

i. Делењем $p(z)$ са $q(z) = z^2 + 2z + 5$ добијамо количник $s(z) = z - 3$. Корени су $-1 \pm 2i$, 3.

ii. Делењем $p(z)$ са $q(z) = z^2 - 4z + 5$ добијамо количник $s(z) = z^2 + 1$. Корени су $-1 \pm 2i$, $1 \pm i$. □

Рјешење 6.2.15. Из $p(x) = 0$, због $p(x^2) = -p(x)p(x+1)$, следи $p(x^2) = 0$, па је нултачка и $(x^2)^2$ итд. Како је број нултачки коначан, мора бити $|z| = 0$ или $|z| = 1$. Takође, из $p(z) = 0$ следи $p[(z-1)^2] = 0$. Зато је у најопштијем случају $p(z) = az^m(z-1)^n$, а то у датој једначини даје

$$ax^{2m}(x^2-1)^n + ax^m(x-1)^n a(x+1)^m x^n = 0.$$

Ако је $a = 0$, тада је $p(x) \equiv 0$. Ако је $a \neq 0$, онда је $1 + ax^{n-m}(x+1)^m - n = 0$, из чега следи $n = m$, $a = -1$. Отуда решења $p(x) = -x^n(x-1)^n$ за $n = 0, 1, 2 \dots$. □

Рјешење 6.2.17. Трећи фактор је увек позитиван, јер $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, а у сва четири наведена случаја су оба сабирка (заграде) позитивни бројеви. Из анализе производа прва два фактора следи: i. $x \in (-1, 5)$, ii. $x \in (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$, iii. $x \in (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, \infty)$, iv. $x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{7})$. □

Рјешење 6.2.18. Ако је $a > x > 0$, онда је $a^2+x^2 < (a+x)^2$. Помножимо ову неједнакост са $a - x > 0$, па имамо $(a^2+x^2)(a-x) < (a^2-x^2)(a+x)$. Поделимо ову неједнакост са $(a+x)(a^2+x^2)$, што је такође веће од нуле, добићемо $\frac{a-x}{a+x} < \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$, а то је и требало доказати. □

Рјешење 6.2.19. Означимо са $a = x_2 + x_3$, $b = x_3 + x_1$, $c = x_1 + x_2$. Отуда $x_1 = \frac{b+c-a}{2}$, $x_2 = \frac{a+c-b}{2}$, $x_3 = \frac{a+b-c}{2}$, па леву страну дате једнакости можемо писати

$$L = \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} + \frac{a+b-c}{2c}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) - \frac{3}{2}.$$

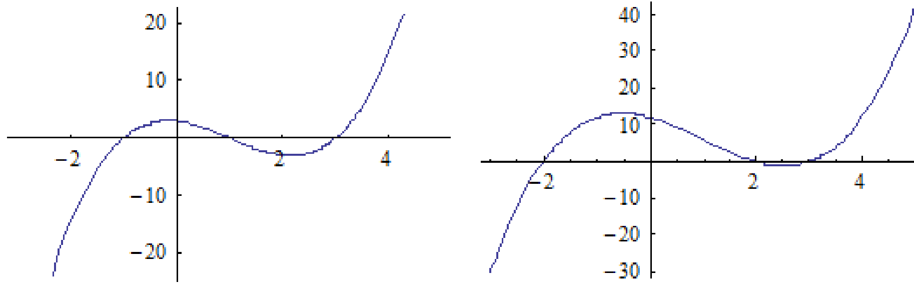
Збирови у заградама нису мањи од 2, што се лако проверава полазећи од $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 \geq 0$, па је $L \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. □

Рјешење 6.2.20. Дату квадратну једначину трансформишемо, редом:

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = 0,$$
$$x + \frac{p}{2} = \frac{\pm\sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

а затим тражени резултат. □

Рјешење 6.2.21. Лако налазимо: i. $y_1(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$ и корене -1, 1 и 3; ii. $y_2(x) = (x+2)(x-2)(x-3)$ и корене -2, 2 и 3. Нацртајте табелу са тачкама у интервалу $x \in (-3, 5)$, у тим тачкама израчунајте $y(x)$ и скицирајте граф. Добићете нешто слично сликама 6.58. □



Slika 6.58: Кубне функције y_1 и y_2.

Матрице

Рјешење 6.3.9. $\hat{A}(a)\hat{A}(b) = \begin{pmatrix} 2-ab & ab-1 \\ 2-2ab & 2ab-1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}^n = \begin{pmatrix} 2-a^n & a^n-1 \\ 2-2a^n & 2a^n-1 \end{pmatrix}$. □

Рјешење 6.3.16. Из $\hat{A}\vec{X} = \lambda\vec{X}$ следи, редом:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x+y=\lambda x \\ -2x+y=\lambda y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (3-\lambda)x+y=0 \\ -2x+(1-\lambda)y=0. \end{cases}$$

Да би овај систем имао решења, осим $(0,0)$, мора бити $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Отуда $(3-\lambda)(1-\lambda)+2=0$, односно $\lambda^2-4\lambda+5=0$. То је карактеристични полином, чији смо општи облик већ нашли у задатку 6.3.13. Сада тражимо његове нултачке.

Из $\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-2)^2+1$ следе сопствене вриједности $\lambda_{1,2}=2\pm i$, комплексни бројеви. Из претходне хомогене једначине, за $\lambda_1=1+i$ налазимо $y_1=(-1+i)x_1$, а за $\lambda_2=2-i$ налазимо $y_2=(-1-i)x_2$. Уз сопствену вриједност λ_k иде сопствени вектор са комплексним компонентама x_k и y_k. □

Рјешење 6.3.17. На слици 6.2 је коваријантно $A_1=\overline{OA^1}+\overline{A^1A_1}$, односно

$$A_1=\overline{OA^1}+\overline{A_1A}\cdot\cos\theta=\overline{OA^1}+\overline{OA^2}\cdot\cos\theta=A^1+A^2\cos\theta.$$

Слично, коваријантно $A_2=\overline{OA^2}+\overline{A^2A_2}$, односно

$$A_2=\overline{OA^2}+\overline{OA^1}\cdot\cos\theta=A^1\cos\theta+A^2.$$

Отуда прва матрична једначина. Инверзна матрица даје другу. □

Рјешење 6.3.18. На слици 6.2 је очигледно $x=A_1$. Затим налазимо:

$$y=\overline{Oy^2}=\overline{OA^2}/\cos(90^\circ-\theta)=(\overline{OA_2}-\overline{A^2A_2})/\sin\theta$$
$$=(\overline{OA_2}-\overline{A_2A}\cdot\cos\theta)/\sin\theta=(\overline{OA_2}-\overline{OA_1}\cdot\cos\theta)/\sin\theta,$$
$$y=(A_2-A_1\cos\theta)/\sin\theta.$$

Отуда прва матрична једначина. Множењем матрица, тј. пресликавањем вектора $\binom{A_1}{A_2}$ из претходног задатка, добијамо другу. □

Рјешење 6.3.19. Нека су дате тачке B и C. Тада је $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ и рецимо да је то вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ са слике 6.2.

i. $\Delta x = A^1$, $\Delta y = A^2$ а $\Delta s = \overline{OA} = a$. Тражена једнакост је косинусна теорема троугла OA^1A.

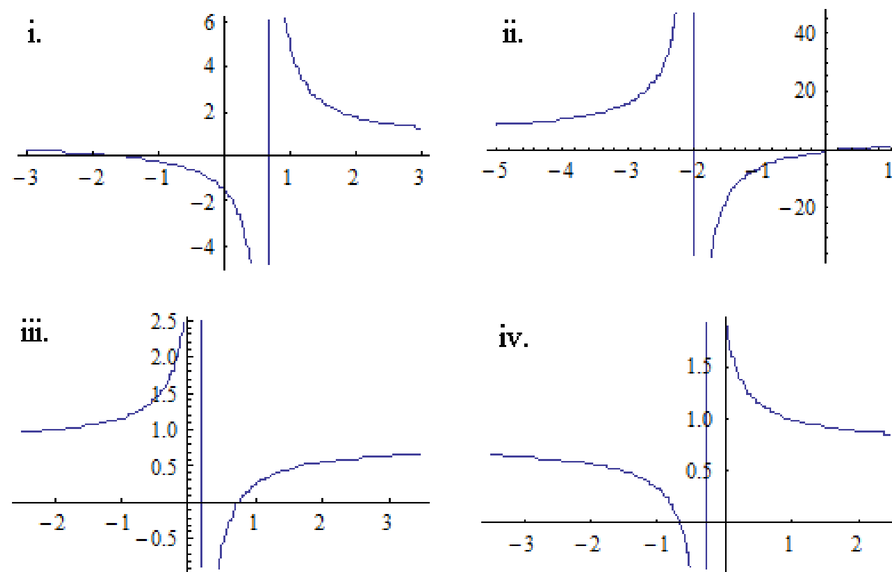
ii. Затим применимо друге трансформације из задатка 6.3.17. Тада је

$$\Delta x = \frac{1}{\sin^2\theta}(\Delta\bar{x} - \Delta\bar{y}\cdot\cos\theta), \quad \Delta y = \frac{1}{\sin^2\theta}(-\Delta\bar{x}\cdot\cos\theta + \Delta\bar{y}).$$

Након уврштавања и сређивања добијамо тражени други резултат. □

Рационални изрази

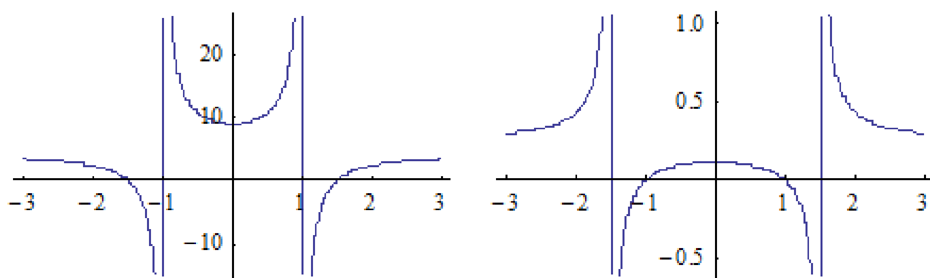
Рјешење 6.4.4. Графови i. $y = \frac{2x+3}{3x-2}$, ii. $y = \frac{5x-1}{x+2}$, iii. $y = \frac{3-4x}{1-5x}$ и iv. $y = \frac{3x+2}{4x+1}$ су приказани на слици 6.59. □



Slika 6.59: Четири графа.

Рјешење 6.4.5. i. Домен функције $y = \frac{4x^2-9}{x^2-1}$ је $\forall x \ne \pm1$, тј. свако x за које називник није нула. Кодомен је домен обрнуте функције $x^2 = \frac{5}{4-y}$, тј. $\forall y \ne 4$. Тиме су одређене и асимптоте, две вертикалне $x = \pm1$ и једна хоризонтална $y = 4$. Нуле добијамо из $y(x) = 0$, тј. $4x^2 - 9 = 0$, или $x^2 = 9$, односно $x = \pm\frac{3}{2}$. За знак функције анализирамо факторе $(2x-3)(2x+3)/(x-1)(x+1)$ таблицом, слично примјеру 5.4.6. Функција је позитивна за $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, 1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$. Граф је на слици 6.60 лево.

ii. Функција $y = \frac{x^2-1}{4x^2-9}$ је дефинисана за $x \ne \pm\frac{3}{2}$, а узима вриједности $y \ne \frac{1}{9}$. Нуле су $x = \pm1$. Знак је идентичан претходној (оне су узајамно реципрочне). Граф је на слици 6.60 десно. □



Slika 6.60: Графови $y = \frac{4x^2-9}{x^2-1}$ и $y = \frac{x^2-1}{4x^2-9}$.

Рјешење 6.4.6. i. $\frac{41}{42}$, ii. -1. □

Рјешење 6.4.7. i. $\frac{a^3-ab^2+a^2b-b^3-2b}{(a+b)^2}$, ii. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$. □

Рјешење 6.4.8. i. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, ii. $x-y$, iii. $x^2(x-1)$. □

Рјешење 6.4.9. i. $\frac{c-a}{a+b+c}$, ii. a, iii. 0. □

Рјешење 6.4.10. i. $\frac{x+y}{x-y}$, ii. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. □

Рјешење 6.4.11. i. Један по један збир са лева, резултат је $\frac{32}{1-x^{32}}$.
ii. Парцијални сабирци $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ дају коначно: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+5}$. □

Рјешење 6.4.12. i. Тражимо константе A, B, C и D тако да важи

$$r_1(x) \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Множењем са називником $r_1(x)$, сређивањем идентитета и упоређивањем коефицијената (испред истог степена x), добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} A+B+C=2, \\ -2A-B-3C+D=-1, \\ A+B+2C-3D=1, \\ -2A-B+2D=-4. \end{cases}$$

Рјешење система је $A=1$, $B=2$, $C=-1$, $D=0$, па је

$$r_1(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

ii. Прво сводимо $r_2(x)$ на праву рационалну функцију (да је степен полинома у називнику већи од степена у бројнику):

$$r_2(x) = \frac{2x^4-x^3-11x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} =$$

$$= \frac{2(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)-5x^3-4x^2-15x-4}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$$

$$= 2 + \frac{-5x^3-4x^2-15x-4}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$= 2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Затим сабирамо разломке (десно од броја 2), сређујемо бројник по степенима x и упоређуемо коефицијенте (са претходним бројником). Добијамо систем:

$$\begin{cases} A+C=-5, \\ A+B+2C+D=-4, \\ A+C+2D=-15, \\ A+B+D=-4, \end{cases}$$

чије је рјешење $A=-5$, $B=6$, $C=0$, $D=-5$. Отуда

$$r_2(x) = 2 - \frac{5}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{5}{x^2+1}.$$

□

Рјешење 6.4.13. Следи из $y = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$ и $x+1 = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$, $y+1 = \frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}$. □

Рјешење 6.4.14. Из услова $\frac{b}{2} = \frac{ac}{a+c}$ следи $a-\frac{b}{2} = \frac{a^2}{a+c}$ и $c-\frac{b}{2} = \frac{c^2}{a+c}$, а отуда $\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{ac}{a+c}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, што је и требало доказати. □

Рјешење 6.4.15. i. Из $ad-bc=0$ следи: $ac(ad-bc)+bd(ad-bc)-(a^2d^2-b^2c^2)=0$,

$$2a^2cd - 2abc^2 + 2abd^2 - 2b^2cd + 2b^2c^2 - 2a^2d^2 = 0,$$

$$a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2 - a^2d^2 + 2abd^2 - b^2d^2 = a^2c^2 - 2a^2cd + a^2d^2 - b^2c^2 + 2b^2cd - b^2d^2,$$

$$(a^2-2ab+b^2)c^2 - (a^2-2ab+b^2)d^2 = a^2(c^2-2cd+d^2) - b^2(c^2-2cd+d^2),$$

$$(a-b)^2(c^2-d^2) = (a^2-b^2)(c-d)^2,$$

а отуда тражена једнакост.

ii. Из услова $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, односно $\frac{a^4}{b^4} = \frac{c^4}{d^4}$, налазимо $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ па $\frac{(a-b)^4}{b^4} = \frac{(c-d)^4}{d^4}$, односно $\frac{a^4-b^4}{b^4} = \frac{c^4-d^4}{d^4}$. Када другу једнакост поделимо првом, добијамо тражену једнакост.

iii. Исто као претходно (ii) осим што степенујемо са n уместо 4. □

Рјешење 6.4.16. Знамо да из $A:B:C = m^2:n^2:p^2$ следи $A:m^2 = B:n^2 = C:p^2 = \lambda$, па и $(A+B+C):(m^2+n^2+p^2) = \lambda$.

i. Дати услов се своди на $\frac{c(ay-bx)}{c^2} = \frac{b(cx-az)}{b^2} = \frac{a(bz-cy)}{a^2}$, па $\frac{c(ay-bx)+b(cx-az)+a(bz-cy)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{0}{a^2+b^2+c^2} = 0$. Како из $c(ay-bx)=0$ следи $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, из $b(cx-az)=0$ следи $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$, из $a(bz-cy)=0$ следи $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, то је $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

ii. Из $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \lambda$ следи $(x+y+z) = \lambda(a+b+c) = \frac{x}{a}(a+b+c)$, односно $\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{x^2}{a^2}$. Помножимо ову једнакост са $x+y+z$, добићемо $\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2} = \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2 y}{a^2} + \frac{x^2 z}{a^2}$. Како је $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ и $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$, то важи и тражена једнакост. □

Рјешење 6.4.17. i. Из услова следи $\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b}$, такође $< \frac{1}{a+c}$ односно $\frac{1}{b+c}$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо тражену.

ii. Због услова $abc > 0$ је дата неједнакост еквивалентна са:

$$abc(a+b+c)^2 \le (bc+ac+ab)(a^3+b^3+c^3),$$

$$a^3bc + ab^3c + abc^3 + 2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + 2ab^2c^2 \le$$

$$\le a^3bc + b^4c + bc^4 + a^4c + ab^3c + ac^4 + a^4b + ab^4 + abc^3,$$

затим

$$(a^4b - 2a^2c^2b + bc^4) + (a^4c - 2a^2b^2c + b^4c) + (ab^4 - 2b^2c^2a + ac^4) \ge 0,$$

$$b(a^2-c^2)^2 + c(a^2-b^2)^2 + a(b^2-c^2)^2 \ge 0,$$

што је тачно. □

Рјешење 6.4.18. Због симетрије можемо претпоставити да је $a \le b \le c$. Тада је $a+b \le c+a \le b+c$, односно $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{a+b}$. Преуређивањем[29] неједнакости добијамо:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \le \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b},$$

$$\frac{a^3}{c+a} + \frac{b^3}{a+b} + \frac{c^3}{b+c} \le \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b}.$$

Сабирањемо ових и делећи са 2, добијамо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + \frac{c^3+a^3}{c+a}\right) \le \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b}.$$

Коначно, због $\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2 - xy + y^2 \ge \frac{x^2+y^2}{2}$, добијамо:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2}\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a+b} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + \frac{c^3+a^3}{c+a}\right)$$

$$\le \frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b}.$$

□

[29] в. и задатак 5.4.12

Рјешење 6.4.19. Због $abc \neq 0$ је $xyz \neq 0$, па је дати систем еквивалентан са:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a}, \quad \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{b}, \quad \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{c},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c}$$

одакле лако добијамо:

$$x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}}, \quad y = \frac{2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \quad z = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}}.$$

□

Рјешење 6.4.20. Уведимо смену $u = \frac{x+y}{xy}$, $v = \frac{x-y}{xy}$. Добијамо систем:

$$u + \frac{1}{u} = a + \frac{1}{a}, \quad v + \frac{1}{v} = b + \frac{1}{b},$$

одакле прво рјешење: $u_1 = a$, $v_1 = b$, и друго $u_2 = \frac{1}{a}$, $v_2 = \frac{1}{b}$. Враћањем смене налазимо:

за $|a| \neq |b|$ и $|ab| \neq 1$: $(x,y) = \left(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b}\right)$, $\left(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{a+b}\right)$, $\left(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1}\right)$, $\left(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{1+ab}\right)$;
за $|a| = |b|$: треће и четврто рјешење;
за $ab = 1$: прво и друго рјешење;
за $|a| = |b|$ и $|ab| = 1$: нема решења. □

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: Математика I за први разред гимназије[30]. Скрипта за наставу држану 2010-11. ш.г. у Бањој Луци.

[2] George Boole: *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, London 1847

[3] Vene Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd

[4] Vladimir Stojanović: *ODABRANI ZADACI* za prvi razred srednjih škola (peto izdanje), Matematiskop, Beograd 1995.

[5] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *УВОД У ТЕОРИЈУ БРОЈЕВА*, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

[6] S. Aljančić: *UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU*, drugo izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

[7] D. S. Mitrinović *Matematička indukcija, binomna formula i kombinatorika*, treće izdanje, Građevinska knjiga, Beograd, 1980.

[8] Ratko Tošić, Vanja Vukoslavčević: *ELEMENTI TEORIJE BROJEVA*, Alef, Novi Sad, 1995.

[9] Dr Slobodanka Mitrović: *Priručnik za polaganje prijemnog ispita iz matematike na fakultetima*, Grafokomerc, Beograd, 1996.

[10] Momir V. Ćelić: *LINEARNA ALGEBRA*, Глас Српски, Графика, Бања Лука, 2010.

[11] Momir V. Ćelić: *NUMERIČKA MATEMATIKA*, Глас Српски, Графика, Бања Лука, 2008.

[12] Radivoje Đurković, Rade Lazović: *Zbirka rešenih zadataka* za takmičenja iz matematike, prvo izdanje, Svjetlost, Sarajevo, 1985.

[13] Vojislav Petrović: *TETIVNI I TANGENTNI ČETVOROUGLOVI*, Materijali za mlade matematičare, Sveska 44, Beograd, 2005.

[30] Математика I: `www.academia.edu/8251898/`

[14] Dr Dragomir Lopandić: *ZBIRKA ZADATAKA* IZ OSNOVA GEOMETRIJE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Savez studenata PMF, Beograd, 1971.

[15] Друштво математичара Србије: *ТАНГЕНТА 600*, Збирка задатака објављених у часопису „Тангента", Београд, 2014.

[16] Viktor Prasolov: *Problems in Plane Geometry*, translated and edited by Dimitry Leites, English version, 2001.

[17] Grupa autora: *Zbirka rešenih zadataka iz Matematike I*, šesto elektronsko izdanje, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, 2014.

[18] Rastko Vukovic: *Fermions*, Half-integer spin particles, Academia[31], January 3, 2015

[19] Kin Y. Li: *Math Problem Book I*, Hong Kong Mathematical Society IMO(HK) Committee, Printed in Hong Kong, 2001.

[31] Fernions: `https://www.academia.edu/9994343/Fermions_half-integer_spin_particles`

Indeks